

Über die Bedeutung des Zahlensystems in Quantentheorien
und die Erweiterung komplexer Größen durch Quaternionen

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
des Fachbereichs Physik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von
Ulrich Wolff
aus

München

August 1978

1979

Über die Bedeutung des Zahlensystems in Quantentheorien
und die Erweiterung komplexer Größen durch Quaternionen

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
des Fachbereichs Physik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von
Ulrich Wolff
aus
München
August 1978



1. Berichterstatter: Prof. Dr. H.P. Dürr

2. Berichterstatter: Prof. Dr. F. Bopp

Tag der mündlichen Prüfung: 21.2.1979

Über die Bedeutung des Zahlensystems in Quantentheorien
und die Erweiterung komplexer Größen durch Quaternionen

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
des Fachbereichs Physik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von
Ulrich Wolff
aus
München
August 1978

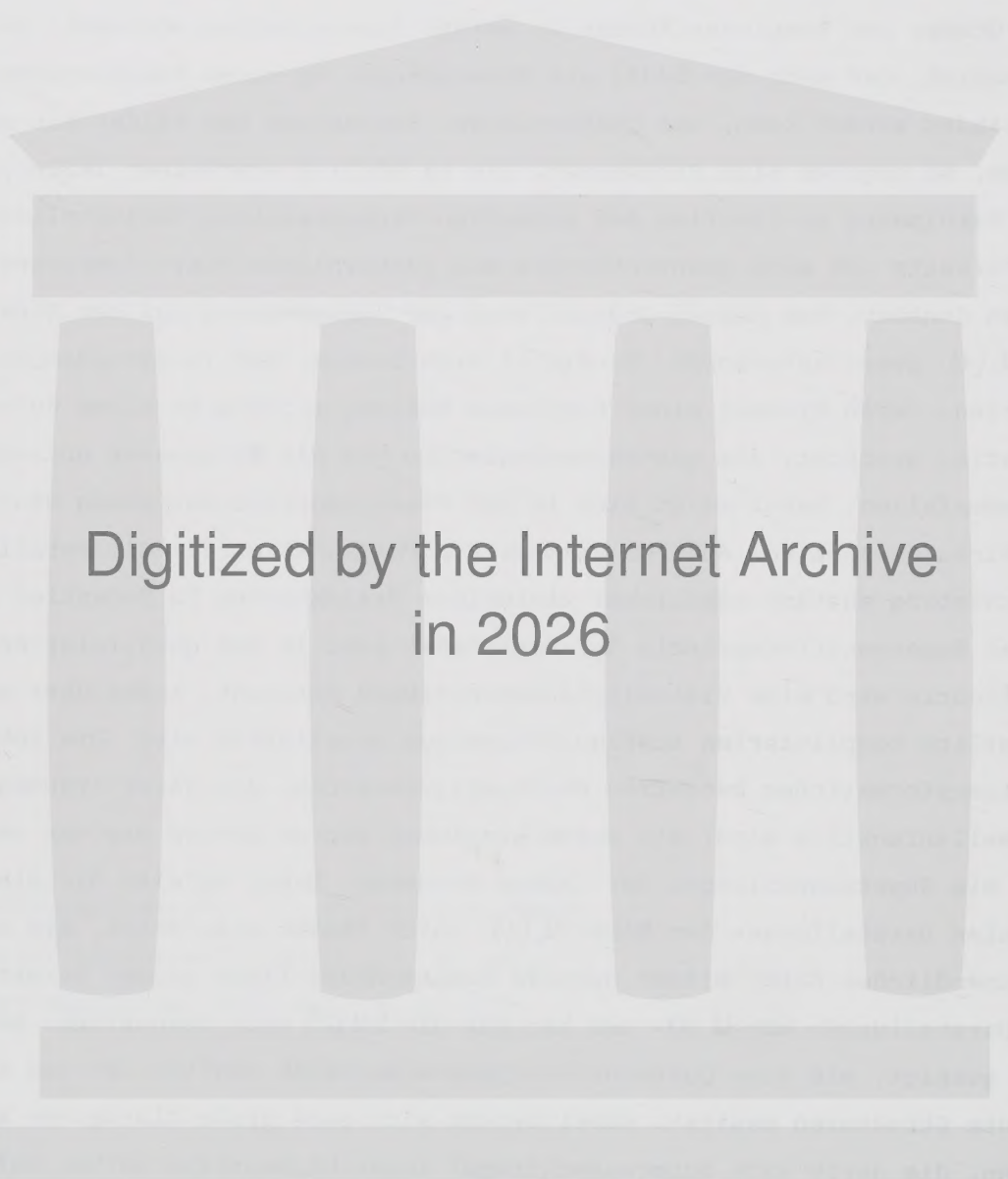
1. Berichterstatter: Prof. Dr. H.P. Dürr

2. Berichterstatter: Prof. Dr. F. Bopp

Tag der mündlichen Prüfung: 21.2.1979

Zusammenfassung:

In dieser Arbeit wird nach Zusammenhängen gesucht zwischen Eichgruppen wie sie in lokal eichinvarianten Feldtheorien auftreten und Gruppen, die mit dem quantenmechanischen Formalismus verbunden sind. In der Quantenelektrodynamik wurde ein solcher Zusammenhang suggeriert, weil die $U(1)$ -Gruppe der komplexen Phasen in beiden Eigenschaften vorkommt. Es wird aufgezeigt, daß auch die $SU(2)$ als Phasengruppe in einem Zahlensystem verstanden werden kann, den Quaternionen. Betrachtet man Felder mit solchen Werten, so ergeben sich Strukturen, die es möglich erscheinen lassen, eine Verbindung zu Theorien der schwachen Wechselwirkung herzustellen; andererseits ist eine Quantentheorie mit Quaternionen statt komplexen Zahlen denkbar. Aus diesen Gründen wird der Zusammenhang auf dem Niveau der $U(1)$ genau untersucht. Es stellt sich heraus, daß in erstquantisierten Theorien, deren Dynamik einer komplexen Wellengleichung in einem äußeren Potential gehorcht, die quantenmechanischen und die Eichphasen untrennbar zusammenfallen. Dabei zeigt sich in der Pfadintegralformulierung deutlich die Wirkungsweise des äußeren Feldes: ein Phasenfaktor für die Parallelverschiebung entlang sämtlicher virtueller Trajektorien im Potential geht in das Superpositionsprinzip der Amplituden ein. In der quantisierten Feldtheorie wird eine Vielteilchenbeschreibung erreicht, indem über einem wesentlich komplizierten Konfigurationsraum quantisiert wird. Die lokalen Eichtransformationen betreffen Feldkonfigurationen, die jetzt Argumente der Wellenfunktion sind; mit deren komplexen Werten hängen sie nur indirekt über die Superauswahlregel der Ladung zusammen. Dabei spielen die eindimensionalen Darstellungen der Eich- $U(1)$ durch Phasen eine Rolle, ein abzählbar unendlicher Satz. Dieser subtile Zusammenhang liegt an der Struktur der Darstellungen von $U(1)$ und hat für die $SU(2)$ kein Gegenstück. Dennoch wird gezeigt, wie eine Quaternionen-Quantenmechanik möglich ist und interessante Strukturen besitzt. Dabei ergibt sich eine große Klasse von Modellen, die durch eine Superauswahlregel ihren Hilbertraum selbst auf einen komplexen reduzieren. Der Konstruktion anderer, wesentlich quaternionischer, Modelle steht die Schwierigkeit entgegen, daß die Methode der klassischen Korrespondenz wesentlich mehr als die quantenmechanischen Grundprinzipien von der komplexen Formulierung Gebrauch macht. So gelingt es nur ein einfaches solches Modell mit zweidimensionalem Hilbertraum zu konstruieren.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555210_0023

Inhaltsverzeichnis

	Seite
O. Einleitung	1
I. Klassische Feldtheorie mit quaternionenwertigen Feldern	
a) Motivation	3
b) Der Zahlenkörper der Quaternionen	3
c) Lokale Invarianz unter Automorphismen des Zahlensystems	7
d) Dynamik der fundamentalen $\mathbb{Q}$ -Felder	12
e) Quaternionen-Spinorfelder	17
f) Zusammenfassung	21
II. Physikalische Systeme als verallgemeinerte Aussageverbände (Propositional Calculus)	
a) Allgemeine Beschreibung	23
b) Abstraktion von der klassischen Mechanik	23
c) Abstraktion von der Quantenmechanik	25
d) Dynamik und Zustand	29
e) Kanonische Quantisierung	32
f) Zusammenfassung	38
III. Komplexe Zahlen in der Quantenmechanik	
a) Eichinvarianz und klassische Mechanik	40
b) Eichinvarianz und Quantisierung	43
c) Eichinvarianz in der Pfadintegralformulierung	46
d) Die Rolle der Phasen beim Aharonov-Bohm Experiment	52
e) Nichtintegrale Phasenfaktoren in der relativistischen Quantenmechanik	54
f) Zusammenfassung	58

IV.	Komplexe Zahlen in der Quantenfeldtheorie	
	a) Quantisierung des reellen Skalarfeldes	59
	b) Feldquantisierung als zweite Quantelung	63
	c) Mehrkomponentige Felder	67
	d) Eichinvarianz	73
	e) Zusammenfassung	77
V.	Quantenmechanik im Quaternionen-Hilbertraum	
	a) Hilberträume über Quaternionen	79
	b) Realisierung von Quantensystemen im $\mathbb{Q}$ -Hilbertraum	84
	c) Energie und Dynamik in $\mathbb{Q}$ -Quantensystemen	87
	d) Poincaré invariante $\mathbb{Q}$ -Quantensysteme	92
	e) Beispiel eines echten $\mathbb{Q}$ -Quantensystems	95
	f) Zusammenfassung	101
	Anhang A: Ableitung der Feldgleichungen durch Variation von $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}$	102
	Anhang B: Spektralzerlegung	105
	Anhang C: Pfadintegraldarstellung für den Evolutionsoperator	107
	Anhang D: Quanten-Phaseneichinvarianz in der Feldtheorie	110
	Anhang E: Symplektische Zerlegung und No-Go-Theoreme in $H_{\mathbb{Q}}$	112
VI.	Schlußfolgerungen	114
	Literaturverzeichnis	115

O. Einleitung

Die Quantenelektrodynamik (QED) ist eine der erfolgreichsten physikalischen Theorien, die wir kennen. Sie scheint die elektromagnetischen Phänomene bis zu den kleinsten mit gegenwärtigen Beschleunigerenergien zugänglichen Abständen richtig zu beschreiben. Genauer gesagt trifft das ohne weitere detaillierte Modelle oder Theorien zu, wenn man Prozesse betrachtet, für die man andere Wechselwirkungen als vernachlässigbar abschätzen kann.

Ein nach ästhetischen bzw. theoretischen Kriterien hervorstechender Zug der QED ist die lokale Eichinvarianz unter der Gruppe der komplexen Phasen $U(1)$. Eichinvarianz tritt bereits in der rein klassischen Theorie auf, aber nur als Transformation des Maxwell-Potentials, aus dem das Feld abgeleitet wird; die Situation ist merkwürdig, da es auf dieser Stufe der Theorie keine Phasen gibt, die lokal zu transformieren wären. Der Weyl'sche Ansatz [1] das Maxwellfeld mit Dilatationsfaktoren $e^{\lambda(x)}$, die zu Phasen lokal isomorph sind, in Verbindung zu bringen, erwies sich als physikalisch falsch, hinterließ jedoch den Begriff des "Eichens". In der Quantenmechanik eines geladenen Schrödingerteilchens im äußeren Feld ist es dann die quantenmechanische Wellenfunktion, die sich unter Umeichungen phasentransformiert. Diese Theorie wird i.a. als Grenzfall einer relativistischen Quantenfeldtheorie aufgefaßt. Um eine solche zu konstruieren geht man gewöhnlich von einer klassischen Feldtheorie aus in Form einer Lagrangedichte, die die Eichinvarianz als differentialgeometrische Struktur besitzt, ähnlich der allgemeinen Koordinateninvarianz in der Relativitätstheorie. Es gibt dann eines oder mehrere klassische komplexe Felder, deren Phasen eichabhängig sind. Mit der kanonischen Quantisierung werden die Felder als Operatoren in einem komplexen Hilbertraum interpretiert, womit eine zweite Sorte von komplexen Größen eingeführt wird. Dabei ist zu beobachten, daß die Eichinvarianz beim Quantisieren gewisse Schwierigkeiten bereitet: man muß die Eichung fixieren, d.h. die Invarianz auf eine bestimmte Weise wieder zerstören. Aus der ganzen Prozedur wird nicht ohne weiteres klar, ob zwischen den komplexen Größen der $U(1)$ -Eichtheorie und denen der Quantenmechanik irgendein tieferer Zusammenhang besteht.

Um neben dem Elektromagnetismus auch noch die schwache Wechselwirkung zu beschreiben, geht man dazu über, die $U(1)$ -Eichgruppe als Untergruppe in eine größere nichtabelsche einzubetten und gelangt so zu den sogenannten vereinheitlichten Modellen, deren bekanntestes wohl das Salam-Weinberg-Modell [2] mit der Gruppe $U(1) \times SU(2)$ ist, das phänomenologisch einigen Erfolg hat. Das Zerfallen der einheitlichen Eichwechselwirkung in physikalisch verschiedene Komponenten geschieht in diesen Modellen durch den Mechanismus der spontanen Symmetriebrechung induziert von elementaren Higgs-Skalarfeldern. Die ganze Eichsymmetrie ist zunächst wieder ein Bestandteil der klassischen Theorie, die dann in der üblichen Weise quantisiert und dabei mit der Gruppe der Phasen des komplexen Hilbertraums vermengt wird.

Die Einbettung der elektromagnetischen $U(1)$ in eine $SU(2)$ wurde in den Arbeiten [3,4] bereits früher vorgeschlagen. Allerdings gelangten die Autoren zu einer Zeit, als nichtabelsche Eichtheorien dieser Art wohl nur von theoretisch-mathematischem Interesse waren, auf ganz andere Art zu einem solchen Ansatz: sie untersuchten eine verallgemeinerte Quantenmechanik, in der Operatoren und Zustände in einem Hilbertraum über dem Körper der Quaternionen definiert sind. Dieses Zahlensystem enthält in natürlicher Weise die Gruppe $SU(2)$ als verallgemeinerte Phasen, und diese bieten sich als Eichgruppe an. In einem solchen Ansatz würde der Limes der QED einhergehen mit der komplexen Quantisierung als Grenzfall, und damit bestünden möglicherweise zwischen der Hierarchie der Wechselwirkungen und dem Quantisierungsformalismus selbst enge Zusammenhänge.

Bedenkt man das heutige allgemeine Interesse an eichinvarianten Quantenfeldtheorien und deren sich abzeichnende Relevanz in der Natur, so erscheint es interessant diese Zusammenhänge zwischen "Quantenphasen" und "Eichphasen" zu untersuchen. In Kapitel I wird der klassische Ansatz nach [3,4] beschrieben und dessen Erweiterung für Materiefelder. In einem II. Kapitel wird mit einer Einführung in die Quantenlogik ein Rahmen gegeben für Fragen nach der Bedeutung des Zahlenkörpers für die Quantisierung, und in III. und IV. die Situation in konventionellen (komplexen) Quantentheorien analysiert. In Kapitel V wird die Quaternionenquantisierung genauer untersucht. Der Leser, der sich nur über Quaternionen-Quantenmechanik informieren möchte, kann eine Abkürzung wählen und Ib, II und V lesen.

I. Klassische Feldtheorie mit quaternionenwertigen Feldern

a) Motivation

Der Ausgangspunkt dieser Arbeit besteht in der Frage, ob der Übergang zu nichtabelschen Eichgruppen im Zusammenhang mit möglichen oder sogar nötigen Verallgemeinerungen der quantenmechanischen Grundprinzipien steht. Ausgehend von einer Eichtheorie der Gruppe der komplexen Phasen $U(1)$, in der Phasen gleichzeitig als skalare Multiplikatoren des komplexen quantenmechanischen Hilbertraums auftreten, kann man fragen, ob man nicht beim Übergang etwa zu einer $SU(2)$ auch allgemeinere Skalare einführen kann oder soll. Dabei wäre gerade die $SU(2)$ besonders ausgezeichnet, denn sie ist die Phasengruppe des Zahlensystems (Körper), das als Erweiterung der komplexen Zahlen am ehesten denkbar ist, der Quaternionen. Über ihnen kann man einen Hilbertraum definieren, so daß in einer solchen Quantenmechanik noch vieles parallel zur gewöhnlichen ist. In den Arbeiten [3;4] von FJSS (Anfangsbuchstaben der Autoren) ist gezeigt, wie ein heuristischer Ansatz mit Quaternionen auf gewisse Züge der heutigen Modelle für schwache und elektromagnetische Wechselwirkung führt. Diese Überlegungen werden zunächst zusammengefaßt und erweitert.

b) Der Zahlenkörper der Quaternionen

Das allgemeine Element aus dem Körper der Quaternionen $\mathbb{Q}$ besteht aus einer reellen Linearkombination seiner vier Basiselemente $\{1, i_1, i_2, i_3\}$:

$$\mathbb{Q} \ni q = q_0 \cdot 1 + q_k i_k \quad (\text{Summe } k=1,2,3) \quad (b1)$$

Damit besitzt $\mathbb{Q}$ die Struktur eines vierdimensionalen reellen Vektorraums, analog der reell-zweidimensionalen komplexen Ebene $\mathbb{C}$. Die Multiplikation ist gegeben durch die Multiplikationstabelle der nichttrivialen (imaginären) Basiselemente i_k :

$$i_k i_l = -\delta_{kl} + \epsilon_{klm} i_m \quad (b2)$$

Das Basiselement 1 wird in Zukunft weggelassen und damit ausgenutzt, daß die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ natürlich in $\mathbb{Q}$ eingebettet sind:

$$\mathbb{R} \cong \{ q \in \mathbb{Q} \mid q = q_0 \cdot 1 \} \quad (b3)$$

Aus (b2) folgt, daß die Multiplikation von Quaternionen nicht kommutativ ist; wie wir noch sehen werden, ist das die einzige, allerdings wesentliche, algebraische Eigenschaft, die sie nicht mit den komplexen Zahlen teilen. Man kann (b2) auf viele Arten durch komplexe Matrizen realisieren, etwa:

$$i_k \leftrightarrow -i \sigma_k \quad (b4)$$

wo σ_k die Pauli-Spinmatrizen sind. Wir betrachten $\mathbb{Q}$ aber als abstrakten Zahlenkörper, definiert durch (b2), und der Darstellung (b4) kommt keine andere Bedeutung zu als etwa einer Darstellung des komplexen i durch eine reelle Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Weiterhin ist für $\mathbb{Q}$ ein involutorischer Antiautomorphismus, die Quaternionenkongjugation, definiert:

$$q \rightarrow q^* = (q_0 + q_k i_k)^* = q_0 - q_k i_k \quad (b5)$$

und es ist leicht zu sehen, daß gilt:

$$\begin{aligned} q^* q &= q_0^2 + \sum_{k=1}^3 q_k^2 \geq 0, \text{ reell} \\ q^* q &= 0 \Leftrightarrow q = 0 \end{aligned} \quad (b6)$$

$$(q_1 q_2)^* = q_2^* q_1^*, \quad (q^*)^* = q \quad (b7)$$

Beweis zu (b7): In der Darstellung (b4) (nicht in jeder Matrixdarstellung !) entspricht die Kongjugation dem Bilden der adjungierten Matrix. Für die aus $*$ abgeleitete Norm:

$$|q| = \sqrt{q^* q} \quad (b8)$$

gilt wie bei reellen und komplexen Größen:

$$|q_1 q_2| = |q_1| |q_2| \quad (b9)$$

Mit (b6) kann man nun auch sehen, daß die Multiplikatoren in $\mathbb{Q}$ wirklich einen Körper definiert, im wesentlichen, daß jedes $q \neq 0$ ein Inverses besitzt:

$$q^{-1} = \frac{1}{q^* q} q^* \quad (b10)$$

Der Realteil von q ist gegeben durch $\operatorname{Re} q = \frac{1}{2} (q + q^*)$ und ist invariant unter zyklischen Vertauschungen:

$$\operatorname{Re} (q_1 q_2) = \operatorname{Re} (q_2 q_1) \quad (b11)$$

denn in der Matrixdarstellung (b4) entspricht $2 \operatorname{Re} q$ der Spur. $\operatorname{Im} q = \frac{1}{2} (q - q^*) = -(\operatorname{Im} q)^*$ nennt man Imaginärteil von q .

Die Eigenschaften (b1)-(b11) werden es erlauben, trotz der Nichtkommutativität einen Hilbertraum mit Skalaren aus $\mathbb{Q}$ zu definieren (s. Va); insbesondere wird die positive Norm in $\mathbb{Q}$ eine positive Norm in diesem Raum erzeugen, was für Anwendungen als Zustandsraum wichtig ist. Gleichzeitig stellen die Quaternionen nach einem bekannten mathematischen Satz den größten Körper dar, der die reellen Zahlen enthält. Er wird noch durch eine Divisionsalgebra echt erweitert, die Oktonionen, die aber weder kommutativ noch assoziativ sind. Versucht man, mit ihnen Matrizen und Vektoren aufzubauen, so ergibt sich ein Kalkül, der vom komplexen wesentlich mehr abweicht als der mit Quaternionen. Dennoch wurden gerade die merkwürdigen nichtassoziativen Eigenschaften der Oktonionenoperatoren mit Quarkfeldern und dem Confinementproblem in Verbindung gebracht [5].

Zum Schluß dieses Abschnitts werden noch einige Vergleich mit komplexen Zahlen angestellt. Die Gleichung:

$$x^2 = -1 \quad (b12)$$

die in $\mathbb{C}$ die Lösungen $\pm i$ besitzt, hat in $\mathbb{Q}$ ein Kontinuum von Lösungen der Mächtigkeit einer S^2 -Sphäre:

$$\eta = n_k i_k \quad \sum_{k=1}^3 n_k^2 = 1$$

Für zwei imaginäre Quaternionen $\eta^\alpha = n_k^\alpha i_k$, $\alpha=1,2$ entspricht das Skalarprodukt dem Antikommutator: $-\frac{1}{2} \{\eta^1, \eta^2\} = n_k^1 n_k^2$; man kann daher

auch geometrisch z.B. von senkrechten statt antikommutierenden Quaternionen sprechen. Ebenfalls gibt es ein größeres Kontinuum von Phasen der Mächtigkeit S^3 :

$$\Omega = \{ \omega \in \mathbb{R} \mid |\omega| = 1 \}$$

$$\Rightarrow \omega = \omega_0 + \omega_k i_k, \quad \omega_0^2 + \sum_{k=1}^3 \omega_k^2 = 1$$

oder in polarer Darstellung:

$$\omega = e^{i\varphi} \eta = \cos \varphi + \eta \sin \varphi \text{ mit}$$

$\varphi \in [0, \pi]$ und einer Lösung η von (b12). Wegen (b9) bildet Ω eine multiplikative Gruppe; durch Einsetzen der Darstellung (b4) sieht man, daß sie isomorph ist zu $SU(2, \mathbb{C})$. Ein allgemeines Quaternion q läßt sich als "Betrag mal Phase" schreiben:

$$q = |q| \omega \quad \text{entsprechend} \quad z = r e^{i\varphi}$$

Jede Lösung η von (b12) liefert eine Einbettung (Körperhomomorphismus) der komplexen Zahlen in $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{C} \ni z = a + bi \rightarrow a + b\eta \in \mathbb{Q} \quad (\text{b13})$$

derart, daß alle Operationen in $\mathbb{Q}$ (inklusive $*$) auf diesen Unterkörper eingeschränkt den $\mathbb{C}$ -Operationen entsprechen. Wählt man ein solches η und eine zweite Lösung ν von (b12), die mit η antikommutiert, dann bilden $\{1, \eta, \nu, \eta\nu\}$ eine Basis und jedes $q \in \mathbb{Q}$ läßt sich eindeutig darstellen als

$$q = (a + b\eta) + (a' + b'\eta)\nu \quad (\text{b14})$$

durch Paare der eingebetteten komplexen Zahlen, ähnlich wie diese wiederum durch Real- und Imaginärteil; man nennt (b14) eine symplektische Darstellung, die allerdings von der Einbettung abhängt.

Eine besondere Rolle spielen in unseren Betrachtungen die Gruppen der Automorphismen der Körper $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ und $\mathbb{Q}$, Abbildungen $x \rightarrow x'$, die mit Addition, Multiplikation und Konjugation verträglich sind:

$$\begin{aligned}
 (x + y)' &= x' + y' \\
 (x y)' &= x' y' \\
 (x^*)' &= (x')^*
 \end{aligned}
 \tag{b15}$$

Dies sind:

für $\mathbb{R}$: nur die Identität

für $\mathbb{C}$: die zweielementige Gruppe $\mathbb{Z}_2$, bestehend
aus Identität und Konjugation $*$

für $\mathbb{Q}$: alle Transformationen: $x \rightarrow \omega x \omega^*$
mit $\omega \in \Omega$, $x \in \mathbb{Q}$

Diese Transformationen entsprechen im Verhältnis 1 : 2 den Elementen von Ω , da ω und $-\omega$ dieselbe Transformation definieren, und bilden die zu $\Omega \cong SU(2)$ lokal isomorphe Gruppe $SO(3)$.

Unter ihr transformieren sich der Realteil von x als Skalar und die drei imaginären Komponenten als Vektor; die eingebetteten reellen Zahlen sind also invariant.

Die Automorphismen sind wichtig, da sie jede algebraische Beziehung zwischen Größen im jeweiligen Zahlensystem invariant lassen. Wenn man davon ausgeht, daß sich physikalische Gesetze in solchen Beziehungen formulieren lassen, die vorhergesagten Meßgrößen aber reell sind, so bedeutet das, daß die physikalischen Ergebnisse invariant sind unter der Transformation aller $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{Q}$ Größen durch Automorphismen. Für die komplexe Quantenmechanik bedeutet das, daß sich keine Wahrscheinlichkeiten oder Energieniveaus ändern, wenn man überall i durch $i^* = -i$ ersetzt (dies ist nicht die Zeitumkehr). In einer Theorie mit $\mathbb{Q}$ -Zahlen wäre diese Gruppe nichttrivial, kontinuierlich, sogar nichtabelsch, und z.B. als universelle Eichgruppe denkbar, indem man die Invarianz zu einer lokalen ausbaut. Invarianz der Physik unter Automorphismen des Zahlensystems wurde von FJSS $\mathbb{Q}$ -Kovarianz genannt.

c) Lokale Invarianz unter Automorphismen des Zahlensystems.

Wir denken uns nun als Ausgangspunkt für eine Quantenfeldtheorie im $\mathbb{Q}$ -Hilbertraum Lagrangedichten für zunächst klassische Felder (keine Operatoren) mit Werten in $\mathbb{Q}$ gegeben, so wie man etwa eine Lagrangedichte für ein komplexes Skalarfeld aufstellt, das durch die Quantisierung Operatorwerte im $\mathbb{C}$ -Hilbertraum annimmt.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi), \varphi(x) \in \mathbb{Q} \quad (c1)$$

Wie im letzten Abschnitt erklärt ist diese Beziehung automatisch kovariant unter Automorphismen, wenn $\mathcal{L}$ durch algebraische Operationen aus φ konstruiert ist. Unter der Transformation

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x) = \omega \varphi(x) \omega^* ; \omega \in \Omega \quad (c2)$$

geht auch $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \omega \mathcal{L} \omega^*$

Wenn $\mathcal{L}$ aus physikalischen Gründen reell ist, gilt $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$, $\mathcal{L}$ ist also invariant. Diese Invarianz ist etwas anderes als Phaseninvarianz, denn letztere ist eine Einschränkung an $\mathcal{L}$. Für komplexes φ wäre etwa ein Term $m^2(\varphi^2 + \varphi^{*2})$ nicht phaseninvariant, so daß die Invarianz seine Abwesenheit erzwingt. Die Invarianz (c2) ist hingegen unvermeidlich, wenn $\mathcal{L}$ reell aus φ gebildet wird. Sie entspricht im komplexen der trivialen Invarianz $\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) = \mathcal{L}(\varphi^*, \partial_\mu \varphi^*)$ für reelles $\mathcal{L}$. Man kann (c2) so formulieren: Die Wirkung hängt nicht von der Realisierung der $\mathbb{Q}$ -Zahlen ab, wovon es auf Grund der Eigenschaften von $\mathbb{Q}$ stets ein $SO(3)$ -mächtiges Kontinuum gibt. Man muß eine von ihnen wählen, um die Theorie zu formulieren; Physik steckt in den algebraischen Beziehungen, nicht aber in der speziellen Wahl.

Während die Kovarianz unter globalen Automorphismen - ω in (c2) hängt nicht von x ab - unvermeidlich ist, hat es erhebliche Konsequenzen, wenn man die Kovarianz lokal fordert für Relationen, die Ableitungsoperatoren enthalten. Der physikalische Inhalt von Differentialgleichungen ist dann sogar unverändert, wenn man die Realisierung des Zahlensystems lokal anders wählt, wobei der Differentialkalkül allerdings eine gewisse Stetigkeit verlangt. Aus (c2) wird also Invarianz der reellen Lagrangedichte unter:

$$\varphi(x) \rightarrow \omega(x) \varphi(x) \omega^*(x), \omega(x) \in \mathbb{Q} \quad (c3)$$

Wie immer, wenn man eine Symmetrie "eicht", kann man argumentieren, daß (c3) physikalisch sogar vernünftiger ist: man mißt immer nur in endlichen Bereichen, und starre Transformationen in der ganzen Raum-Zeit sind

nicht sinnvoll; speziell raumartig zueinander liegende Punkte sollten von den Realisierungen ihrer lokalen Quaternionensysteme "nichts wissen". Wir erreichen die lokale Invarianz in üblicher Weise durch Einführung eines Eichfeldes. Mit Ableitungen werden, grob gesagt, Größen an infinitesimal benachbarten Punkten verglichen. Dabei müssen wir beachten, daß die $\mathbb{Q}$ Systeme in x und in $x+dx$ sich durch einen Automorphismus unterscheiden können. Es soll nun ein $\omega(x, dx) \in \Omega$ geben, das diesen Unterschied beschreibt :

$$\varphi(x) \rightarrow \omega(x, dx) \varphi(x) \omega^*(x, dx) = \tilde{\varphi}(x, dx) \quad (c4)$$

Wir nennen $\tilde{\varphi}$ das um dx parallelverschobene $\varphi(x)$, eine lokale $\mathbb{Q}$ -Größe am Punkt $x+dx$. Die Differenz zwischen dem Feld $\varphi(x+dx)$ und $\tilde{\varphi}(x+dx)$ führt zur kovarianten Ableitung, die als Differenz zweier lokaler Größen am gleichen Punkt kovariant ist unter lokalen Automorphismen; sie beschreibt die Variation des Feldes, die nach Abzug des Beitrags übrigbleibt, der von der lokal verschiedenen Konvention bezüglich der Realisierungen der $\mathbb{Q}$ -Zahlen stammt. Konsistenz und Stetigkeit verlangen:

$$\begin{aligned} \omega(x, dx) &\rightarrow 1 \quad \text{für } dx \rightarrow 0 \\ \omega(x, dx) &\cong 1 - \frac{1}{2} C_\mu(x) dx^\mu \\ \omega \in \Omega : \omega \omega^* &= 1 \iff C_\mu^* = -C_\mu \end{aligned} \quad (c5)$$

C_μ ist das rein imaginäre Eichfeld.

$$\begin{aligned} \varphi(x+dx) - \tilde{\varphi}(x+dx) &= \varphi(x) + dx^\mu \partial_\mu \varphi(x) - \omega(x, dx) \varphi(x) \omega^*(x, dx) \\ &= dx^\mu \left(\partial_\mu \varphi(x) + \frac{1}{2} [C_\mu(x), \varphi(x)] \right) \end{aligned}$$

Damit lautet die kovariante Ableitung eines beliebigen $\mathbb{Q}$ -wertigen Feldes φ :

$$D_\mu \varphi(x) = \partial_\mu \varphi(x) + \frac{1}{2} [C_\mu(x), \varphi(x)] \quad (c6)$$

Die Operation D_μ ist also eine gewöhnliche Ableitung plus ein Automorphismus in infinitesimaler Form; sie "erbt" daher Eigenschaften, die beide Teiloperationen besitzen:

$$i) \quad D_\mu (\varphi_1 \varphi_2) = \varphi_1 (D_\mu \varphi_2) + (D_\mu \varphi_1) \varphi_2$$

von der Produktregel für ∂_μ und (b15) für Automorphismen

$$ii) \quad (D_\mu \varphi)^* = D_\mu (\varphi^*), \text{ da } \partial_\mu \text{ reeller Operator ist und} \quad (c7)$$

wegen (b15). Daraus folgt :

$$\text{Re } D_\mu \varphi = D_\mu \text{Re } \varphi = \partial_\mu \text{Re } \varphi$$

Die Kovarianz bedeutet: mit $\varphi \rightarrow \varphi'(x) = \omega(x) \varphi(x) \omega^*(x)$ transformiert sich auch

$$D_\mu \varphi \rightarrow D'_\mu \varphi'(x) = \omega(x) D_\mu \varphi(x) \omega^*(x)$$

$$D'_\mu \varphi' = \partial_\mu \varphi' + \frac{1}{2} [C'_\mu, \varphi'] \quad (c8)$$

Aus dieser Bedingung findet man für C_μ das typische inhomogene Transformationsverhalten:

$$C'_\mu = \omega C_\mu \omega^* - 2 (\partial_\mu \omega) \omega^* \quad (c9)$$

C'_μ bleibt dabei imaginär:

$$\omega \omega^* = 1 \Rightarrow (\partial_\mu \omega) \omega^* = -\omega (\partial_\mu \omega^*) = -[(\partial_\mu \omega) \omega^*]^*$$

C_μ selbst transformiert sich also nicht wie eine lokale $\mathbb{Q}$ -Größe; das entspricht der Situation in der Relativitätstheorie, wo sich die Christoffelsymbole, die die Parallelverschiebung von Vektoren beschreiben, nicht wie Tensoren unter Koordinatenwechsel verhalten. Auch vom Konzept her gibt es hier noch eine Analogie: Das Christoffelfeld oder das metrische Feld $g_{\mu\nu}(x)$, aus dem es in der Riemann-Geometrie abgeleitet werden kann, beschreiben die Geometrie selbst, also Eigenschaften der Basismannigfaltigkeit, auf der die anderen Felder definiert werden. Die geometrischen Felder sind in diesem Sinne fundamentaler als die übrigen. Ähnlich sehen wir die C_μ Felder an: sie beschreiben Eigenschaften des Zahlensystems $\mathbb{Q}$, in dem alle quantenmechanischen Gesetze zu formulieren sind.

Im Hinblick auf eine Quantentheorie mit $\mathbb{Q}$ -Größen führen wir mit FJSS noch ein fundamentales Feld $\eta(x)$ ein, mit der Eigenschaft:

$$\eta^*(x) = -\eta(x) \quad , \quad \eta^2(x) = -1 \quad (c10)$$

sozusagen eine lokale $\sqrt{-1}$. In der Quantentheorie taucht das bis auf Vorzeichen eindeutige imaginäre i explizit auf in Vertauschungsrela-

tionen, bei der Konstruktion unitärer Symmetrietransformationen aus hermiteschen Generatoren und im Zusammenhang mit Spinorfeldern. In $\mathbb{Q}$ gibt es ein Kontinuum solcher Skalare, und nur indem man die lokale Auswahl eines von ihnen zu einem dynamischen Freiheitsgrad macht wird die Theorie kovariant unter den Automorphismen (c3). Die Notwendigkeit einer $\sqrt{-1}$ wird bei der Diskussion von Operatoren im $\mathbb{Q}$ -Hilbertraum klarer werden.

$\eta(x)$ ist neben $C_\mu(x)$ ein weiteres im obigen Sinn fundamentales Feld, das sich aber unter (c3) kovariant als lokale $\mathbb{Q}$ -Zahl transformiert. Schaut man wieder auf die Relativitätstheorie, so ist dort der Tensor $g_{\mu\nu}(x)$ ähnlich, der allerdings kovariant konstant und dadurch mit der Konnektion (Christoffelsymbole) verknüpft ist. (Das gilt in der Einstein-Theorie; allgemeinere Geometrien sind möglich, aber vom Experiment her nicht favorisiert.) Mit einer analogen Bedingung kann man auch η und C_μ verbinden :

$$D_\mu \eta = \partial_\mu \eta + \frac{1}{2} [C_\mu, \eta] = 0 \quad (c11)$$

Wir schreiben C_μ als: $C_\mu = A_\mu \eta + B_\mu$ mit $\{\eta, B_\mu\} = 0$, zerlegen also C_μ in einen Anteil parallel zu η und den senkrechten Rest. Dann folgt:

$$\begin{aligned} 0 = D_\mu \eta &= \partial_\mu \eta + B_\mu \eta \\ B_\mu &= (\partial_\mu \eta) \eta \end{aligned} \quad (c12)$$

Der zu η senkrechte B_μ -Anteil der Konnektion wird durch das kovariant konstante η fixiert, während der zu η proportionale Anteil, also ein reelles Vektorfeld, beliebig bleibt. In der Gravitation ist die Lage nur dann so, wenn man Torsion zuläßt; dann ist die Parallelverschiebung nicht durch die Metrik allein bestimmt, sondern besitzt weitere Freiheitsgrade. In der $\mathbb{Q}$ -Theorie werden wir sehen, daß (c12) dem Grenzfall entspricht, in dem sich die Quaternionen auf komplexe Größen reduzieren, die gemäß (b13) lokal durch $\eta(x)$ eingebettet sind. Gleichzeitig reduziert sich die Automorphismengruppe $SO(3)$ aber nicht auf die $\mathbb{Z}_2$ der $\mathbb{C}$ -Zahlen sondern es bleibt eine $SO(2) \cong U(1)$ Eichgruppe übrig, die Drehungen, die die "Achse" η festlassen. Somit wird die komplexe Theorie mit Phaseneichinvarianz als Grenzfall in unserer Erweiterung vorhanden sein. Die

Frage ist, ob $D_\mu \eta = 0$ immer gilt, wie anscheinend die metrische Bedingung in der Gravitation, oder ob die Natur von den neuen Freiheitsgraden der Theorie Gebrauch macht.

d) Dynamik der fundamentalen Q -Felder

Als nächstes werden wir eine unter lokalen Automorphismen invariante Wirkung $\mathcal{L}_Q$ für die Felder C_μ und η aufstellen. In einer beliebigen Feldtheorie, in der kovariante Ableitungen D_μ und die imaginäre Einheit η vorkommen, ist der Term $\mathcal{L}_Q$ dann hinzuzufügen. Für das Eichfeld wird wie üblich zunächst die Krümmung gebildet. Wir betrachten ein beliebiges Q -Feld $\varphi(x)$ und vertauschen kovariante Ableitungen:

$$\begin{aligned} D_\mu D_\nu \varphi - D_\nu D_\mu \varphi &= \frac{1}{2} [K_{\mu\nu}, \varphi] \\ \text{mit } K_{\mu\nu} &= D_\mu C_\nu - D_\nu C_\mu + \frac{1}{2} [C_\mu, C_\nu] \\ K_{\mu\nu} &= -K_{\nu\mu} = -K_{\mu\nu}^* \end{aligned} \quad (d1)$$

wie man durch Rechnung findet. (d1) definiert $K_{\mu\nu}$ durch eine kovariante Beziehung; daher ist die Lösung derart aus C_μ aufgebaut, daß sie sich als lokale Q GröÙe transformiert wie man auch leicht direkt nachprüft. Genauso erhält man in der Relativitätstheorie den Krümmungstensor $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ aus den Christoffelsymbolen, die keine Tensoren sind. Wenn wir nun aus der kovarianten Krümmung eine invariante Wirkung machen wollen, stoßen wir auf den wesentlichen Unterschied zwischen Gravitation und Yang Mills-artigen Theorien [6]. In der ersteren werden Vektoren, also Raum-Zeit Objekte, in der Raum-Zeit parallelverschoben; als Folge hat $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ nur Tensoreigenschaften, und alle Indizes können mit $g_{\alpha\beta}$ zum Krümmungsskalar kontrahiert werden, der als Wirkung die Einsteintheorie liefert. Die imaginäre Krümmung $K_{\mu\nu}$ hat Lorentz-Tensoreigenschaften und Q -Eigenschaften, so daß man sie nicht zu einem reellen Skalar kontrahieren kann. Die Yang-Mills Wirkung ist daher in der Struktur verschieden und quadratisch in $K_{\mu\nu}$:

$$\mathcal{L}_{y.m.} \sim K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} \quad (d2)$$

Für das imaginäre Einheitsfeld $\eta(x)$ kann man einfach in der Lagrange-dichte für Skalarfelder die gewöhnlich Ableitung durch die kovariante

ersetzen und erhält insgesamt durch Linearkombination:

$$\mathcal{L}_Q = \frac{1}{4e^2} K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} - \frac{1}{2\ell^2} (D_\mu \eta)(D^\mu \eta) \quad (d3)$$

mit der Nebenbedingung $\eta^2 + 1 = 0$, $\eta^* = -\eta$. Dimensionen: Von der Definition der kovarianten Ableitung (c6) hat C_μ die Dimension Länge⁻¹ und damit $K_{\mu\nu} K^{\mu\nu}$ Länge⁻⁴. Die Konstante e dieser klassischen Theorie erhält also Dimension Wirkung^{-1/2}. Hätten wir die kovariante Ableitung mit einer Kopplungskonstanten definiert $D_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi + g[C_\mu, \varphi]$, dann könnte e durch Skalieren der Felder in g absorbiert werden. Mit der kovarianten Ableitung als primärem Objekt erscheint unsere Konvention natürlich. η ist dimensionslos, wie man an der Nebenbedingung sieht, daher hat ℓ Dimension Wirkung^{-1/2} x Länge. Ein Faktor vor der gesamten Lagrangedichte ist für die klassische Theorie natürlich bedeutungslos.

Wie in Anhang A gezeigt ist, ergibt die Variation von $\mathcal{L}_Q$ die Feldgleichungen:

$$D_\mu K^{\mu\nu} + \frac{e^2}{2\ell^2} \eta \overleftrightarrow{D}^\nu \eta = 0 \quad (A12) \rightarrow (d4)$$

$$D_\nu (\eta \overleftrightarrow{D}^\nu \eta) = 0 \Leftrightarrow [\eta, D^2 \eta] = 0 \quad (A9) \rightarrow (d5)$$

und es gilt die Identität:

$$\varepsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} D^\nu K^{\kappa\lambda} = 0 \quad (A12) \rightarrow (d6)$$

Der im letzten Abschnitt erwähnte Spezialfall

$$D_\mu \eta = 0 \quad (d7)$$

erfüllt offenbar (d5). Es folgt dann:

$$0 = (D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu) \eta = \frac{1}{2} [K_{\mu\nu}, \eta]$$

und damit

$$K_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} \eta \quad (d8)$$

mit reellem $F_{\mu\nu}$. Die Bewegungsgleichungen lauten in diesem Fall:

$$0 = D_\mu (F^{\mu\nu} \eta) = (D_\mu F^{\mu\nu}) \eta + F^{\mu\nu} (D_\mu \eta) = (\partial_\mu F^{\mu\nu}) \eta \quad (d9)$$

$$0 = \varepsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} D^\nu (F^{\kappa\lambda} \eta) = \varepsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} (\partial^\nu F^{\kappa\lambda}) \eta \quad (d10)$$

Der Krümmungstensor $K_{\mu\nu}$ besteht also nur aus sechs reellen Komponenten $F_{\mu\nu}$, die die freien Maxwellgleichungen erfüllen. (d7) schränkt auch das Potential ein (man beachte $\{\eta, \partial_\mu \eta\} = 0$ wegen $\eta^2 = -1$):

$$\begin{aligned} 0 = D_\mu \eta &= \partial_\mu \eta + \frac{1}{2} [C_\mu, \eta] = \frac{1}{2} [\eta \partial_\mu \eta + C_\mu, \eta] \\ \Rightarrow C_\mu + \eta \partial_\mu \eta &= A_\mu \eta, \quad A_\mu \text{ reell} \end{aligned} \quad (d11)$$

und die Krümmung (d1) lautet:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [\partial_\mu \eta, \partial_\nu \eta] \eta \quad (d12)$$

Wegen Identität (d10) gibt es Potentiale $\tilde{A}_\mu$, durch die $F_{\mu\nu}$ sich in der üblichen Form ausdrückt:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \tilde{A}_\nu - \partial_\nu \tilde{A}_\mu$$

$\tilde{A}_\mu$ hängt kompliziert von $\partial_\mu \eta$ ab, und es ist daher bequemer die lokalen $\mathbb{Q}$ -Systeme so zu eichen (rotieren), daß gilt:

$$\eta \rightarrow \omega \eta \omega^* = i_3 \Rightarrow \partial_\mu \eta \rightarrow \partial_\mu i_3 = 0$$

Dann fallen die Zusatzterme in (d12) gleich weg.

Wir wollen uns nun dem allgemeinen Fall $D_\mu \eta \neq 0$ zuwenden. Es gibt dennoch eine ähnliche Formel wie (d11):

$$\begin{aligned} 0 &= D_\mu \eta - \partial_\mu \eta - \frac{1}{2} [C_\mu, \eta] \\ \Rightarrow 0 &= \frac{1}{2} [\eta D_\mu \eta - \eta \partial_\mu \eta - C_\mu, \eta] \\ \Rightarrow C_\mu &= A_\mu \eta - \eta \partial_\mu \eta + \eta D_\mu \eta \\ &= C_\mu^\circ + B_\mu \end{aligned} \quad (d13)$$

$$\text{mit } C_\mu^\circ = A_\mu \eta - \eta \partial_\mu \eta$$

$$B_\mu = \eta D_\mu \eta, \quad \{B_\mu, \eta\} = 0$$

Wir spalten die kovariante Ableitung in zwei Teile auf:

$$\begin{aligned} D_\mu \varphi &= D_\mu^\circ \varphi + D_\mu^1 \varphi \\ D_\mu^\circ \varphi &= \partial_\mu \varphi + \frac{1}{2} [C_\mu^\circ, \varphi] \\ D_\mu^1 \varphi &= \frac{1}{2} [B_\mu, \varphi] \end{aligned} \quad (d14)$$

die gekennzeichnet sind durch ihre Wirkung auf η : $D_\mu^\circ \eta = 0$
Da B_μ lokal kovariant ist, ist auch $D_\mu^\circ \varphi = D_\mu \varphi - \frac{1}{2} [B_\mu, \varphi]$ kovariant und D_μ° besitzt alle Eigenschaften der kovarianten Ableitung. Der D_μ° -Anteil entspricht der ganzen Ableitung, wenn (d7) gilt; insbesondere ist seine Krümmung

$$[D_\mu^\circ, D_\nu^\circ] \varphi = \frac{1}{2} [F_{\mu\nu} \eta, \varphi] \quad (d15)$$

mit $F_{\mu\nu}$ aus (d12) von Maxwellscher Art. $F_{\mu\nu}$ erfüllt Identität (d10) und ist durch (d15) eichinvariant definiert. Für den gesamten Krümmungstensor ergibt sich:

$$K_{\mu\nu} = (F_{\mu\nu} - [B_\mu, B_\nu] \eta) \eta + D_\mu^\circ B_\nu - D_\nu^\circ B_\mu \quad (d16)$$

Der Ausdruck in der Klammer ist reell, während die beiden letzten Terme mit η antikommutieren: $0 = D_\mu^\circ (\{\eta, B_\nu\}) = \{\eta, D_\mu^\circ B_\nu\}$. Beim Quadrieren kommt daher nur vor:

$$K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} = - (F_{\mu\nu} - [B_\mu, B_\nu] \eta)^2 + (D_\mu^\circ B_\nu - D_\nu^\circ B_\mu)^2 \quad (d17)$$

Der andere Term in $\mathcal{L}_Q$ ergibt:

$$- \frac{1}{2\ell^2} (D_\mu \eta)(D^\mu \eta) = \frac{1}{2\ell^2} B_\mu B^\mu \quad (d18)$$

In (d17) gibt es Quadrate von reellen Termen und von imaginären, die in einer Ebene senkrecht zu η liegen im reell-dreidimensionalen Raum der imaginären Quaternionen. Es bietet sich an, diese Ebene mit $\mathbb{C}$ zu identifizieren und Drehungen um die η Achse mit Phasendrehungen in dieser Ebene. Da mit η auch die Lage der senkrechten Ebene $\mathbf{x}$ -abhängig ist, treten "Scheinkräfte" oder besser "Scheinpotentiale" auf wie der

$\partial_\mu \eta$ Term in C_μ^0 . Die Identifizierung wird daher nur einfach, wenn wir wieder in eine "starre" Eichung gehen; eine Art Inertialsystem der $\mathbb{Q}$ Freiheitsgrade: $\eta = i_3$. Unsere Ausdrücke haben dann folgende Form:

$$\begin{aligned} C_\mu^0 &= A_\mu i_3 \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\ B_\mu &= B_\mu^1 i_1 + B_\mu^2 i_2 = (B_\mu^1 + B_\mu^2 i_3) i_1 =: \sqrt{2} W_\mu i_1 \\ W_\mu &\text{ ist komplex bezüglich einer Einbettung mit } i_3; \\ \text{es gilt } W_\mu i_1 &= i_1 W_\mu^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} D_\mu^0 B_\nu &= D_\mu^0 (W_\nu i_1) = (D_\mu^0 W_\nu) i_1 + W_\nu (D_\mu^0 i_1) \\ &= (\partial_\mu W_\nu) i_1 + W_\nu A_\mu i_3 i_1 \\ &= (\partial_\mu + A_\mu i_3) W_\nu i_1 \end{aligned} \quad (d19)$$

Bei lokalen Drehungen um $\eta = i_3$

$$q \rightarrow \omega q \omega^*, \quad \omega = e^{i_3 \frac{\alpha(x)}{2}} \quad (d20)$$

die die allgemeinsten Automorphismen sind, die unsere Eichung $\eta = i_3$ erhalten, transformieren sich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} B_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}} \eta D_\mu \eta \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \omega B_\mu \omega^* = e^{i_3 \frac{\alpha}{2}} W_\mu i_1 e^{-i_3 \frac{\alpha}{2}} \\ &= e^{i_3 \alpha} W_\mu i_1 \end{aligned}$$

$$\text{also } W_\mu \rightarrow e^{i_3 \alpha} W_\mu$$

$$\begin{aligned} \text{und } A_\mu i_3 = C_\mu^0 &= C_\mu - B_\mu \rightarrow \omega (C_\mu - B_\mu) \omega^* - 2(\partial_\mu \omega) \omega^* \\ &= A_\mu i_3 - \partial_\mu \alpha i_3 \end{aligned}$$

$$\text{also } A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \alpha$$

Für die gesamte Wirkung $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbb{Q}} &= -\frac{1}{4e^2} \left\{ \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + F_{\mu\nu} W^\mu W^{\nu*} i_3 + 2[(W \cdot W^*)^2 - W^\mu W_\mu^2] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} |(\partial_\mu + i_3 A_\mu) W_\nu - (\partial_\nu + i_3 A_\nu) W_\mu|^2 \right\} - \frac{1}{\ell^2} |W|^2 \end{aligned} \quad (d21)$$

oder, wenn wir die Felder skalieren um die übliche Normierung der kinetischen Terme zu erhalten: $\frac{1}{e} A_\mu = \tilde{A}_\mu \Rightarrow \frac{1}{e} F_{\mu\nu} = \tilde{F}_{\mu\nu}, \frac{1}{e} W_\mu = \tilde{W}_\mu$

$$\mathcal{L}_Q = - \left\{ \frac{1}{4} \tilde{F}_{\mu\nu}^2 + e \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{W}^\mu \tilde{W}^{\nu*} i_3 + 2e^2 [(\tilde{W} \cdot \tilde{W}^*)^2 - \tilde{W}^2 \tilde{W}^{*2}] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} |(\partial_\mu + i_3 e \tilde{A}_\mu) \tilde{W}_\nu - (\partial_\nu + i_3 e \tilde{A}_\nu) \tilde{W}_\mu|^2 \right\} - \frac{e^2}{\ell^2} |\tilde{W}|^2 \quad (d11)$$

In dieser Parametrisierung haben wir das Eichfeld C_μ in ein Maxwell-Feld und ein geladenes Vektorfeld mit anomalem magnetischen Moment und quartischer Selbstkopplung zerlegt. Die Wirkung des imaginären Einheitsfeldes η hat einen Massenterm für das Vektorfeld hinterlassen. Es hat also einen ähnlichen Effekt wie das Higgs-Feld in vereinheitlichten Theorien. Der Unterschied ist, daß η als fundamentales Feld im Hinblick auf die Quaternionen-Quantenmechanik eingeführt ist und nicht als gewöhnliches Skalarfeld mit ungewöhnlichem Massenterm; auch bleibt wegen der Bedingung $\eta^2 = -1$ kein Freiheitsgrad übrig, kein skalares Higgs-Teilchen.

e) Quaternionen-Spinorfelder

In der Spinor-QED koppelt das Photonfeld an ein komplexes vierkomponentiges Diracfeld, dessen Phase den $U(1)$ Eichfreiheitsgrad trägt. Da wir im letzten Abschnitt ein masseloses $U(1)$ -Eichfeld als Anteil der fundamentalen Q -Felder C_μ und η gefunden hatten, liegt es nun nahe, einen Spinor mit Q - anstelle von $\mathbb{C}$ -Komponenten zu betrachten und eine unter lokalen Automorphismen invariante Dynamik zu konstruieren. Davon erwarten wir dann im Limes $D_\mu \eta = 0$ das $U(1)$ -Elektron-Photon-System zu finden und ansonsten weitere Verkopplungen mit den neuen Freiheitsgraden. Die Dirac- γ -Matrizen können wir durch reelle orthogonale Matrizen realisieren:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = -2g_{\mu\nu}, \quad g_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -) \quad (e1)$$

$$\gamma_\mu \gamma_\mu^T = 1 \quad (\text{keine Summe})$$

$$\gamma_0^T = -\gamma_0, \quad \gamma_i^T = +\gamma_i \quad (e2)$$

$$\gamma_\mu^T = \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0$$

Damit kommutieren $\mathbb{Q}$ -Größen und $\mathbb{Q}$ -invariante γ -Matrizen, und Spin- und $\mathbb{Q}$ -Freiheitsgrade gehen als direktes Produkt ein. Der Pseudoskalar γ_5 ist ohne i zu definieren:

$$\begin{aligned}\gamma_5 &= \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = -\gamma^5 \\ \gamma_5^2 &= -1 \quad \gamma_5 = \gamma_5^* = -\gamma_5^T\end{aligned}\tag{e3}$$

Die Lorentztransformationen in der Dirac-Darstellung sind damit auch reell von der Form $\exp\left\{\frac{1}{8}\omega_{\mu\nu}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\right\}$; das ist notwendig, damit z.B. die Multiplikation des Spinors mit einem $\mathbb{Q}$ -Faktor immer eine Lorentz-invariante Operation ist! Eine Darstellung mit den Eigenschaften (e1)-(e3) ist z.B. gegeben durch:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_y \\ i\sigma_y & 0 \end{pmatrix}\tag{e4}$$

wobei Λ die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist und $\sigma_{x,y,z}$ die Paulimatrizen. Alle anderen Darstellungen mit den verlangten Eigenschaften sind dazu orthogonal-äquivalent.

Für komplexe Spinoren schreibt man als freien Term in die Wirkung:

$$\mathcal{L}_\psi = -\frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma_\mu \overleftrightarrow{\partial}^\mu \psi = -\text{Re} \bar{\psi} \gamma_\mu i \partial^\mu \psi\tag{e5}$$

Wir ersetzen

$$\begin{aligned}\psi &\triangleq \psi_\alpha, \alpha=1,\dots,4, \quad \psi_\alpha \in \mathbb{C} \rightarrow \psi_\alpha \in \mathbb{Q} \\ i &\rightarrow \eta(x) \\ \partial^\mu &\rightarrow D^\mu\end{aligned}$$

und erhalten:

$$\mathcal{L}_\psi^{\mathbb{Q}} = -\text{Re} \bar{\psi} \gamma_\mu \eta D^\mu \psi\tag{e6}$$

als eine unter lokalen $\mathbb{Q}$ -Automorphismen invariante Wirkung. In der $\eta = i_3$ Eichung können wir ψ zerlegen in bezüglich i_3 komplexe Felder φ und χ :

$$\psi_\alpha = \varphi_\alpha + \chi_\alpha i_1\tag{e7}$$

und $\mathcal{L}_4^Q$ durch diese ausdrücken.

$$\begin{aligned} \text{Re } \bar{\psi} \gamma_\mu i_3 \partial^\mu \psi &= \text{Re } (\bar{\psi} - i_1 \bar{\chi}) \gamma_\mu i_3 \partial^\mu (\psi + \chi i_1) \\ &= \text{Re } \bar{\psi} \gamma_\mu i_3 \partial^\mu \psi + \text{Re } \bar{\chi} \gamma_\mu i_3 \partial^\mu \chi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Re } \bar{\psi} \gamma_\mu i_3 \frac{1}{2} [A^\mu i_3, \psi] &= \text{Re } (\bar{\psi} - i_1 \bar{\chi}) \gamma_\mu i_3 A^\mu i_3 \chi i_1 \\ &= + \text{Re } i_1 \bar{\chi} \gamma_\mu A^\mu \chi i_1 = - \bar{\chi} \gamma_\mu \chi A^\mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Re } \bar{\psi} \gamma_\mu i_3 \frac{1}{2} [B^\mu, \psi] &= \\ \frac{1}{2} \underbrace{\text{Re } \bar{\psi} \gamma_\mu i_3 B^\mu \psi}_{=0} - \frac{1}{2} \text{Re } \bar{\psi} \gamma_\mu i_3 \psi B^\mu \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{Re } (\bar{\psi} - i_1 \bar{\chi}) \gamma_\mu i_3 (\psi + \chi i_1) W^\mu i_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= +\frac{1}{\sqrt{2}} \text{Re } \bar{\psi} \gamma_\mu i_3 \chi W^{\mu*} - \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Re } \bar{\chi} \gamma_\mu i_3 \psi W^\mu \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\bar{\psi} \gamma_\mu \chi i_3 W_\mu^* - \bar{\chi} \gamma_\mu \psi i_3 W^\mu \right) \end{aligned}$$

Damit haben wir insgesamt für :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4^Q &= -\frac{i_3}{2} (\bar{\psi} \gamma_\mu \overleftrightarrow{\partial}^\mu \psi + \bar{\chi} \gamma_\mu \overleftrightarrow{\partial}^\mu \chi) \\ &\quad + \bar{\chi} \gamma_\mu \chi A^\mu + \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\chi} \gamma_\mu \psi i_3 W^\mu + \bar{\psi} \gamma_\mu \chi (i_3 W^\mu)^*) \quad (\text{e8}) \end{aligned}$$

Der Q Spinor ψ enthält zwei Spinorfelder im gewöhnlichen Sinn, ein geladenes χ von dem Anteil in ψ , der in der Ebene senkrecht zu η liegt und ein neutrales ψ , der bezüglich η komplexe Anteil. Es gibt eine Dreierkopplung zwischen χ , ψ und W_μ aus (d19), dem geladenen massiven Vektoranteil der Konnektion C_μ . Im Limes $D_\mu \eta = 0$ wird $W_\mu = 0$ und das Feld ψ entkoppelt ganz.

Die Ladungsstruktur der Dreierterme sieht aus wie geladene schwache und elektromagnetische Wechselwirkung von Elektron und Neutrino, aber es fehlen die (V-A) Projektoren. Mit komplexen Feldern kann man die (V-A) Struktur der schwachen Wechselwirkung leicht bekommen, indem man für das

Neutrino-feld ψ die Nebenbedingung fordert:

$$\gamma_5 \psi = i \psi \quad (\text{Linkshändigkeit}) \quad (e9)$$

Sie ist invariant unter eigentlichen Lorentztransformationen, nicht aber unter der Parität und impliziert $\bar{\psi} \psi = 0$; das Neutrino muß masselos sein. Es ist zu beachten, daß die Nebenbedingung mit unserem reell gebildeten γ_5 wegen $\gamma_5^2 = -1$ einen imaginären Eigenwert erfordert. Deshalb kann ein kovariantes Analogon zu (e9) für $\mathbb{Q}$ -Spinoren lauten:

$$\gamma_5 \psi = \eta \psi \quad (\text{links-linkshändig}) \quad (e10)$$

$$\gamma_5 \psi = \psi \eta \quad (\text{rechts-linkshändig}) \quad (e11)$$

Die Analogie besteht darin, daß die Nebenbedingung die Wirkung der Dirac-matrix γ_5 mit einer skalaren Operation im Zahlensystem identifiziert; da die Skalare nicht kommutieren, hat man neben dem Vorzeichen (links- oder rechtshändig) auch die Wahl zwischen Links- und Rechtsmultiplikation. Für die bezüglich $\eta = i_3$ komplexen Komponenten bedeutet (e10):

$$\gamma_5 (\psi + \chi i_1) = i_3 \psi + i_3 \chi i_1$$

d.h. beide Komponentenfelder sind linkshändig im gewöhnlichen Sinn, während (e11):

$$\gamma_5 (\psi + \chi i_1) = i_3 \psi - i_3 \chi i_1$$

zur Folge hat, daß die neutrale Komponente linkshändig und die geladene rechtshändig ist.

Wir erhalten die korrekte (V-A) Theorie, wenn wir zwei $\mathbb{Q}$ -Spinorfelder einführen, ein links-linkshändiges ψ_{LL} und ein rechts-linkshändiges ψ_{RL} mit den Komponenten:

$$\begin{aligned} \psi_{LL} &= \psi_L + e_L i_1 \\ \psi_{RL} &= \psi'_L + e_R i_1 \end{aligned} \quad (e12)$$

wobei die Indizes L, R an den Komponenten im gewöhnlichen Sinn (e9) gemeint sind. Beide Felder erhalten Wirkungen gemäß (e6), und nach der symplektischen Zerlegung haben wir:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{e,v}^Q = & \frac{-i_3}{2} \left(\bar{e} \gamma \cdot \vec{\partial} e + \bar{v}_L \gamma \cdot \vec{\partial} v_L + \bar{v}_L' \gamma \cdot \vec{\partial} v_L' \right) \\ & + \bar{e} \gamma^\mu e A_\mu + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\bar{e}_L \gamma_\mu v_L i_3 W^\mu + \bar{v}_L \gamma_\mu e_L (i_3 W^\mu)^* \right) \end{aligned} \quad (e13)$$

mit $e = e_L + e_R$

Es gibt keine schwache Kopplung zwischen den Komponenten von ψ_{RL} , da der Vektor $\bar{v}_L' \gamma^\mu e_R$ verschwindet. Das Feld v_L' nimmt an keiner Wechselwirkung teil, ist also unphysikalisch. Auch einen Massenterm für e können wir Q -kovariant hinzufügen. Mit unseren γ -Matrizen müßte er für einen komplexen Spinor lauten $\mathcal{L}_m = m i \bar{\psi} \psi$. Nach unseren Regeln wird daraus für Q -Spinoren

$$\mathcal{L}_m = m \operatorname{Re} \bar{\psi} \eta \psi \quad (e14)$$

Die Position von η ist ohne Bedeutung, da sie nur Massenvorzeichen der Komponenten beeinflusst. Der Term verschwindet für ψ_{LL} und ψ_{RR} einzeln. Wir können aber bilden:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m^Q &= 2 m \operatorname{Re} (\bar{\psi}_{LL} \eta \psi_{RL}) \\ &= 2 m \operatorname{Re} (\bar{v}_L - i_1 \bar{e}_L) i_3 (v_L' + e_R i_1) \\ &= 2 m \operatorname{Re} (\bar{e}_L i_3 e_R) = m i_3 \bar{e} e \end{aligned} \quad (e15)$$

f) Zusammenfassung

Wir haben ein Verfahren konstruiert wie man in klassischen Feld-Lagrangedichten die komplexen Felder zu Quaternionenfeldern fortsetzt. Die nichttriviale Automorphismengruppe, die man dann in dem größeren Zahlensystem vorfindet, bauten wir zu einer Eichgruppe aus. Insbesondere werden dabei explizit auftretende i 's zu dem dynamischen Feld $\eta(x)$ fortgesetzt, das damit lokal eine Richtung im Gruppenraum auszeichnet und die Einbettung einer elektromagnetischen $U(1)$ in die Automorphismen $SO(3)$ definiert. Mit Hilfe von η konnten wir die Quaternionenfelder wieder

durch komplexe parametrisieren, unter denen wir dann einen massiven geladenen Partner des Photons und einen neutralen Partner des Elektrons fanden. Diese sich ergebenden klassischen Strukturen erinnern also an schwache Wechselwirkung. Die Aufgabe der übrigen Kapitel ist es zu klären, inwieweit eine solche Fortsetzung von komplexen Größen zu Quaternionen wirklich mit einer verallgemeinerten Quantentheorie in Verbindung gebracht werden kann.

II. Physikalische Systeme als verallgemeinerte Aussagenverbände (Propositional Calculus)

a) Allgemeine Beschreibung

Der Kalkül der Quantenlogik (propositional calculus) behandelt in abstrakter Weise die möglichen Verknüpfungen zwischen den zentralen Gegenständen jeder physikalischen Theorie: Ergebnisse von Messungen [7]. Solche Messungen werden dazu auf ihre einfachste Form gebracht, nämlich Experimente, die nur ein Bit Information liefern: ja oder nein, 0 oder 1. Es zeigt sich, daß jede tatsächliche und komplexe Messung im Prinzip als Kombination von solchen "Primitivmessungen", Propositionen, aufgefaßt werden kann; z.B. teile man eine Zeigerskala in Intervalle und frage, ob der Zeiger in Intervall I_1 , I_2 , usw. anzeigt, was in diesem Fall Propositionen a_1 , a_2 , entspricht. In gewisser Weise ist diese Sprache der Realität besonders angepaßt, da immer Intervalle ("Fehlerbalken") gemessen werden und Meßwerte nur eine Idealisierung darstellen. Aus der Erfahrung mit physikalischen Systemen abstrahiert man nun, daß die so definierten Propositionen die Struktur eines Verbandes bilden, sowohl für Quantensysteme, als auch mit besonderen zusätzlichen Eigenschaften bei klassischen Systemen. Das Ergebnis dieser natürlich erscheinenden Abstraktion ist unabhängig vom quantenmechanischen Hilbertraum bzw. klassischen Phasenraum, die als bestimmte mathematische Realisierungen der abstrakten Strukturen erscheinen. Damit hat man einen begrifflichen Rahmen zu fragen, ob die übliche Darstellung alle Möglichkeiten erfaßt, und was die Bedeutung einzelner Elemente wie etwa der komplexen Zahlen ist.

b) Abstraktion von der klassischen Mechanik

Ein klassisch mechanisches System wird vollständig charakterisiert durch seinen Phasenraum, dessen Punkte (p, q) den möglichen Konfigurationen entsprechen. Das dynamische Gesetz (Differentialgleichung) extrapoliert einen Anfangspunkt zu einer Kurve, den in der Zeit durchlaufenen Konfigurationen. Jede Meßgröße, Observable, ist durch eine Funktion auf dem Phasenraum gegeben. Damit ist klar, wie in diesem Fall die Propositionen aussehen:

$P_{\Delta} \triangleq$ der Systempunkt liegt in der Untermenge Δ des Phasenraumes. Will man nun wissen, ob der Wert einer Observablen f im Intervall $[a, b]$ liegt, so wählt man $\Delta = f^{-1}([a, b])$. Die Frage $f \in [a, b]$ ist dann gleichbedeutend mit der Messung der Proposition P_{Δ} . Die P_{Δ} zu allen Teilmengen bilden so eine "Basis" für alle Messungen. Damit entsprechen die Propositionen in diesem Fall den Teilmengen einer Menge, des Phasenraumes, und bilden einen Boole'schen Verband mit den Operationen:

$\Delta_1 \subset \Delta_2$	"Implikation" entspricht der Teilmengenrelation
$\Delta_1 \cap \Delta_2$	"und" entspricht dem mengentheoretischen Durchschnitt
$\Delta_1 \cup \Delta_2$	"oder" entspricht der mengentheoretischen Vereinigung
$\Delta \rightarrow \Delta'$	"nicht" entspricht der mengentheoretischen Komplementmenge
$\phi \triangleq$	absurde Proposition, immer mit Wert "nein", entspricht der leeren Menge
$I \triangleq$	triviale Proposition, immer wahr, entspricht dem ganzen Phasenraum, physikalisch der Existenz des Systems.

Die physikalische Bedeutung z.B. der Implikation $\Delta_1 \subset \Delta_2$ besteht darin, daß, wenn immer man für P_{Δ_1} den Wert "ja" gefunden hat, man dieses Resultat mit Sicherheit auch für P_{Δ_2} voraussagen kann; die Proposition $P_{\Delta_1 \cup \Delta_2}$ ergibt "ja", wenn dies bei der Messung von P_{Δ_1} oder P_{Δ_2} der Fall ist, d.h. die Konfiguration in Δ_1 oder Δ_2 liegt. Für Vereinigung und Negation ergeben sich ähnliche Interpretationen, die im hier betrachteten klassischen Fall alle isomorph der gewöhnlichen Aussagenlogik sind. Innerhalb der Menge aller Propositionen existiert also eine Struktur, die sich in Relationen der Art $\Delta_1 \subset \Delta_2$ ausdrückt. Diese Verknüpfungen erfüllen die Axiome des Boole'schen Verbandes:

Eigenschaften der Implikation :

- i) $a \subset a$
- ii) $a \subset b$ und $b \subset a \Rightarrow a = b$, definiert "=";
physikalisch werden Messungen in Äquivalenzklassen eingeteilt, die die gleiche Eigenschaft messen (b1)
- iii) $a \subset b$ und $b \subset c \Rightarrow a \subset c$

Definition von $\cap$ (größte untere Schranke, "und"):

$$x \subset a_i \quad \text{für alle } i \in N \subset \mathbb{N} \iff x \subset \bigcap_N a_i \quad (\text{b2})$$

Eigenschaften der Negation oder des Orthokomplements:

zu a existiert auch a' und es gilt:

- i) $(a')' = a$
 - ii) $a' \cap a = \emptyset$
 - iii) $a \subset b \Leftrightarrow b' \subset a'$
- (b3)

damit definiert man $\cup$ ("oder"):

$$a \cup b = (a' \cap b')'$$

Distributivgesetze:

$$\begin{aligned} a \cap (b \cup c) &= (a \cap b) \cup (a \cap c) \\ a \cup (b \cap c) &= (a \cup b) \cap (a \cup c) \end{aligned}$$

(b4)

(b1)-(b3) definieren einen Verband, der boole'sch heißt, g.d.w auch (b4) gilt.

Da man nach [7] zeigen kann, daß jeder die Axiome (b1)-(b4) erfüllende Verband als System von Teilmengen dargestellt werden kann, also im wesentlichen eine Phasenraumbeschreibung erlaubt, kann man (b1)-(b4) als abstrakte Definition der Kinematik (mögliche Aussagen) klassischer Systeme ansehen. Der Vorteil dieser Betrachtung liegt darin, daß durch Abschwächung von (b4) dieser Rahmen weit genug auch für Quantensysteme wird, und man dann die Frage nach möglichen Darstellungen, etwa durch Hilbertraumoperatoren, formulieren kann.

c) Abstraktion von der Quantenmechanik

In der üblichen Formulierung der Quantenmechanik hängen Meßwerte mit Observablen zusammen, die mathematisch selbstadjungierten Operatoren in einem komplexen Hilbertraum entsprechen. Die möglichen Meßwerte sind die (reellen) Eigenwerte dieser Operatoren. Propositionen sind dann mit Observablen zu identifizieren, die nur zwei Eigenwerte besitzen, die man zweckmäßigerweise auf 0 und 1 normiert. Das sind aber gerade die definierenden Eigenschaften von Projektionsoperatoren:

$$\text{Proposition } a \quad \hat{=} \quad \text{Operator } P_a : P_a^\dagger = P_a, P_a^2 = P_a, \quad (c1)$$

wie man in einer Basis von Eigenvektoren verifiziert. Daß die Messungen solcher Observabler ausreichen, sieht man formal an der Zerlegbarkeit einer beliebigen Observablen in Summen bzw. Integrale über Projektoren gewichtet mit den Eigenwerten (Anhang B).

Es entspricht also der Eigenschaft $\mathcal{a}$ ein Unterraum im Hilbertraum, das Bild des Raumes unter $P_{\mathcal{a}}$, im Vergleich zu Untermengen im klassischen Phasenraum. Man stellt fest, daß auch das System von Untervektorräumen im Hilbertraum einen Verband bildet, wobei jetzt die Operationen, die wieder (b1)-(b3) (nicht (b4)) erfüllen, folgendermaßen zu definieren sind:

$\Delta_1 \subset \Delta_2$	Δ_1 Untervektorraum von Δ_2
$\Delta_1 \cap \Delta_2$	Durchschnitt (ist wieder Unterraum)
$\Delta_1 \cup \Delta_2$	lineare Summe (ist wieder Unterraum)
Δ_1'	orthogonales Komplement (bezüglich Hilbertraum-Skalarprodukt)
$\{0\}$	der Nullvektorraum entspricht der Absurden Proposition ϕ und
H	der ganze Raum, der trivialen Proposition I.

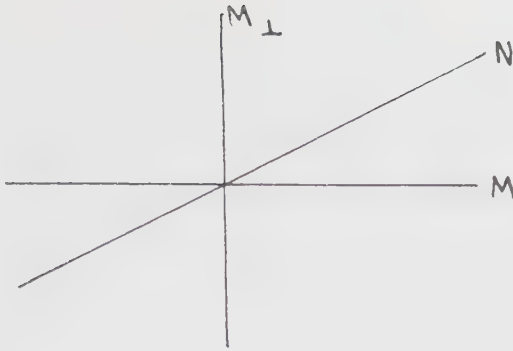
(c2)

Ausgedrückt durch die zu den Unterräumen gehörenden Projektoren nehmen die Verbandsoperationen eine algebraische Form an:

$$\begin{aligned}
 \Delta_1 \subset \Delta_2 &\iff P_{\Delta_1} P_{\Delta_2} = P_{\Delta_1} \\
 \Delta_1 \cap \Delta_2 &: P_{\Delta_1 \cap \Delta_2} = \lim_{n \rightarrow \infty} (P_{\Delta_1} P_{\Delta_2})^n \\
 \Delta_1' &: P_{\Delta_1'} = 1 - P_{\Delta_1} \\
 \Delta_1 \cup \Delta_2 &: P_{\Delta_1 \cup \Delta_2} = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} (P_{\Delta_1'} P_{\Delta_2'})^n
 \end{aligned}$$

(c3)

Die Minimalpropositionen (Atome), im klassischen Fall gegeben durch Punkte (kleinste Teilmengen) im Phasenraum, werden nun durch eindimensionale Unterräume (Strahlen) dargestellt. Quantensysteme sind also in ihrer Verbandsstruktur eine Erweiterung der klassischen, indem man die Forderung der Distributivität (Axiom (b4)) fallenläßt; für die üblichen mathematischen Darstellungen der entsprechenden Verbände hat das zur Folge, daß man von einer Punktgeometrie (Mengen) zu einer projektiven Geometrie (Unterräume) übergehen muß. Durch ein einfaches Beispiel [7] in der Ebene sieht man, daß Axiom (b4) im zweiten Fall tatsächlich verletzt ist:



Es gilt:

$$\begin{aligned} N \cap (M \cup M_{\perp}) &= N \cap (\text{Ebene}) = N \neq \\ (N \cap M) \cup (N \cap M_{\perp}) &= \{0\} \cup \{0\} = \{0\}, \end{aligned}$$

während (b4) Gleichheit beider Ausdrücke erfordert, was für Untermengen automatisch gilt!

Um die weitere Charakterisierung der Quantenmechanik zu finden, wird der Begriff der Kompatibilität in die Verbandstheorie übertragen. In der Operatorsprache heißen Propositionen a_1 und a_2 mit zugehörigen Projektoren P_1 und P_2 kompatibel, wenn gilt

$$[P_1, P_2] = 0, \quad (c4)$$

was physikalisch bedeutet, daß a_1 und a_2 gemeinsam meßbar sind. In [8] ist gezeigt, daß dies für die zugehörigen Räume Δ_1 , Δ_2 äquivalent ist zu der Beziehung:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (\Delta_1 \cap \Delta_2) \cup (\Delta_1 \cap \Delta_2') \\ \text{bzw.} \quad \Delta_2 &= (\Delta_2 \cap \Delta_1) \cup (\Delta_2 \cap \Delta_1') \end{aligned} \quad (c5)$$

(beide Formen wiederum äquivalent)

Für drei paarweise kompatible Propositionen gilt dann wieder (b4), sie bilden sozusagen eine klassische Unterstruktur. In dieser Richtung kann man eine plausible, zu (c5) äquivalente, Definition angeben:

Propositionen $a_1, \dots, a_n$ heißen kompatibel, wenn der von ihnen erzeugte Unterverband (das kleinste $a_1, \dots, a_n$ enthaltende und unter den Operationen abgeschlossene Untersystem) Boole'sch ist. Folglich sind in Boole'schen Verbänden alle Propositionen kompatibel wie zu erwarten.

Der Verband der Hilbertraumquantenmechanik ist durch (b1)-(b3) nicht ganz charakterisiert, sondern es gelten noch gewisse abgeschwächte Formen von (b4). Dazu muß man unterscheiden zwischen dem endlichdimensionalen Fall, wo gilt:

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c \quad \text{für alle } a, b, c \quad (c6)$$

(Modulgesetz)

und dem unendlichdimensionalen (wichtigeren) Fall, wo auch (c6) verletzt ist, aber gilt (schwaches Modulgesetz):

$$a \leq b \quad \Rightarrow \quad a \quad \text{und} \quad b \quad \text{kompatibel} \quad [9] \quad (c7)$$

Der Name erklärt sich daraus, daß (c7) aus (c6) folgt, aber nicht umgekehrt. (c7) ist physikalisch notwendig; um festzustellen, ob mit a immer auch b den Wert "ja" hat, muß man sie gemeinsam messen können.

Bevor wir nun den Darstellungssatz für solche Verbände formulieren können, brauchen wir noch zwei Begriffe: Das Zentrum eines Verbandes heißen die Propositionen, die mit allen übrigen kompatibel sind. Ein Verband heißt irreduzibel oder kohärent, wenn sein Zentrum nur aus ϕ und $\mathbb{I}$ besteht. Ein allgemeiner Verband läßt sich als direkte Vereinigung in irreduzible Komponenten zerlegen, so daß Propositionen aus je zwei verschiedenen Komponenten kompatibel sind; diese Situation entspricht dem Vorhandensein von Superauswahlregeln in der üblichen Formulierung. Klassische Systeme (Boole'sche Verbände) bieten sich hier als folgender Extremfall dar: Das Zentrum ist der ganze Verband, und die kohärenten Komponenten sind Teilmengensysteme von $\{a\}$, der Menge bestehend aus dem einen Phasenraumpunkt a . Sie sind damit trivial, da es nur die leere Menge ϕ und $\{a\}$ selbst gibt.

Mit Hilfe der eingeführten Begriffe läßt sich die Frage nach den möglichen Darstellungen beantworten [8]: Jede irreduzible Komponente eines Verbandes, die (b1)-(b3) und (c7) erfüllt, kann als eine projektive Geometrie von Untervektorräumen dargestellt werden in einem Vektorraum über einem Körper. Die eindeutige Orthokomplementierung erfordert insbesondere ein definites hermitesches Skalarprodukt und einen involutorischen Antiautomorphismus im Zahlenkörper, d.h. eine Operation $\alpha \rightarrow \alpha^*$ mit:

$$\alpha^{**} = \alpha, \quad (\alpha + \beta)^* = \alpha^* + \beta^*, \quad (\alpha \beta)^* = \beta^* \alpha^* \quad (c8)$$

Es fällt auf, daß dieser Satz nichts weiteres über die Natur des Zahlenkörpers aussagt; die reellen und komplexen Zahlen sowie die Quaternionen haben die verlangten Eigenschaften und sind außerdem alle endlich dimensional^[28]en Körper, die die Reellen enthalten. Es ist bisher nicht gelungen [8] Eigenschaften der Observablen, möglicherweise physikalisch interpretierbar, zu lokalisieren, die zwischen den drei möglichen Körpern $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$ unterscheiden. Selbst die Möglichkeit verschiedener Zahlen für verschiedene kohärente Komponenten ist zugelassen. Während die Verbandsstruktur der klassischen Kinematik eineindeutig dem Phasenraumformalismus entsprach, scheint sie bei der Quantenkinematik gewisse Erweiterungen zuzulassen hinsichtlich des Zahlensystems.

d) Dynamik und Zustand

Nachdem die Kinematik, die möglichen Messungen am System, als Verband von Propositionen beschreibbar ist, müssen auch die Dynamik, das Gesetz der zeitlichen Entwicklung des Systems, und der Zustandsbegriff in diese abstrakte Sprache gebracht werden. Dazu orientieren wir uns zunächst wieder an der klassischen Mechanik. Ein Zustand ist dort ein Punkt im Phasenraum oder allgemeiner (statistische Mechanik) eine normierte Dichtefunktion $\mathcal{S}(p, q)$ über dem Phasenraum. Dann ist die Wahrscheinlichkeit w_Δ die Eigenschaft Δ (Untermenge im Phasenraum!) zu finden gegeben durch:

$$w_\Delta = \int_{\Delta} \mathcal{S} \, dp \, dq \quad 0 \leq w_\Delta \leq 1 \quad (d1)$$

Man kann den Zustand auffassen als Abbildung der Propositionen in das reelle Intervall $[0, 1]$; er ordnet jedem möglichen ja-nein Experiment seine ja-Wahrscheinlichkeit zu.

In der Quantentheorie ist der Zustand im allgemeinen durch eine Dichtematrix W gegeben:

$$W^\dagger = W > 0 \quad \text{Tr } W = 1 \Rightarrow W^2 \leq W \quad (d2)$$

Im Spezialfall eines reinen Zustandes ist W ein Projektor auf einen eindimensionalen Raum, den des Zustandsvektors, und es gilt $W^2 = W$; diese Situation des reinen Zustands, gegeben durch eine Richtung (eindimensionaler Unterraum) im Hilbertraum, entspricht klassisch dem Punkt im Phasenraum. Dort besitzen dann alle Elementarpropositionen die Wahrscheinlichkeit 0 oder 1, d.h. das statistische Element ist in diesem klassischen idealen Grenzfall verschwunden. Das passiert in der Quantenmechanik bekanntlich nicht, wohl aber ist die statistische Unsicherheit minimal und der Zustand bestmöglich definiert. Einer Proposition P_Δ (Projektor) wird der Wahrscheinlichkeitswert

$$w_\Delta = \text{Tr}(P_\Delta W) \quad 0 \leq w_\Delta \leq 1 \quad (\text{d3})$$

zugeordnet. Somit ist der Zustand hier ebenfalls eine Abbildung vom Verband der Propositionen in $[0,1]$. Ist der Zustand rein, also W ein Projektor, dann kann man schreiben

$$W = |\psi\rangle\langle\psi|, \quad |\psi\rangle \text{ beliebiger normierter Vektor aus dem Bereich von } W$$

und es gilt

$$w_\Delta = \text{Tr}(P_\Delta W) = \langle\psi|P_\Delta|\psi\rangle$$

Die ja-Wahrscheinlichkeit ist das Absolutquadrat der Komponente von $|\psi\rangle$ im Unterraum, der der gemessenen Eigenschaft zugeordnet ist. Es soll erwähnt werden, daß die Zustandsabbildungen in beiden Fällen noch durch weitere Eigenschaften eines Wahrscheinlichkeitsmaßes über Verbänden gekennzeichnet sind.

Die Dynamik beschreibt die zeitliche Veränderung der Wahrscheinlichkeiten, wenn ein gewisser Anfangszustand vorliegt. Klassisch geschieht dies durch eine Schar von Abbildungen D_t des Phasenraumes auf sich, gegeben durch Integration der Bewegungsgleichung:

$$(p(t+t_0), q(t+t_0)) = D_t(p(t_0), q(t_0))$$

D_t ordnet einem beliebigen Anfangspunkt $(p(t_0), q(t_0))$ den zugehörigen Bahnpunkt nach Verstreichen der Zeit t zu (das System sei invariant unter Zeittranslation). Die Schar D_t bildet die dynamische Gruppe:

$$\begin{aligned} D_{t_1+t_2} &= D_{t_1} \circ D_{t_2} \\ D_{-t} &= D_t^{-1} \end{aligned} \quad (d3)$$

und es gilt für die Bewegung von Teilmengen Δ_1, Δ_2 des Phasenraumes:

$$\begin{aligned} \Delta_1 \subset \Delta_2 &\iff D_t(\Delta_1) \subset D_t(\Delta_2) \\ D_t(\Delta') &= D_t(\Delta)' \\ D_t(\Delta_1 \cup \Delta_2) &= D_t(\Delta_1) \cup D_t(\Delta_2) \\ D_t(\Delta_1 \cap \Delta_2) &= D_t(\Delta_1) \cap D_t(\Delta_2) \end{aligned} \quad (d4)$$

Dies alles folgt, wenn D_t ein Bijektion des Phasenraumes ist, was üblicherweise der Fall ist, da sich Phasenbahnen nicht kreuzen und der umgekehrte Bewegungsablauf existiert. Mit Hilfe von D_t lautet die zeitabhängige ja-Wahrscheinlichkeit der Proposition Δ :

$$w_\Delta(t) = \int_{D_t^{-1}(\Delta)} \xi(p, q) dp dq = \int_{\Delta} \xi \circ D_t^{-1}(p, q) dp dq \quad (d5)$$

wobei $\xi(p, q)$ den Zustand zur Zeit $t=0$ beschreibt. Die Gleichheit der beiden Ausdrücke beruht auf dem Liouville'schen Satz, wonach die Volumenelemente konstant bleiben unter D_t und daher keine Jakobi-Determinante auftritt. Die erste Form können wir interpretieren als Messung einer zeitabhängigen Proposition $\Delta_t = D_t^{-1}(\Delta)$, während die Zeitentwicklung im zweiten Fall beim Zustand liegt: $\xi_t(p, q) = (\xi \circ D_t^{-1})(p, q)$. Wir haben hier das klassische Analogon zu Heisenberg- und Schrödingerbild, deren Äquivalenz der Liouville-Satz garantiert. Für den reinen Zustand als Extremfall $\xi = \delta(p-p_0)\delta(q-q_0)$ zur Zeit $t=0$ finden wir das anschaulich klare Resultat:

$$\begin{aligned} w_\Delta(t) &= \begin{cases} 1 & \text{für } (p_0, q_0) \in D_t^{-1}(\Delta) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 1 & \text{für } D_t(p_0, q_0) \in \Delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Abstrakt wird also die Dynamik durch eine einparametrische Gruppe von Abbildungen des Verbandes auf sich gegeben, die die Eigenschaften (d4) besitzen; (d4) besagt, daß Verbandsrelationen zwischen den Propositionen zeitunabhängig sind, oder mathematisch, daß D_t ein Verbandsautomorphismus ist. Solche Relationen hängen nicht vom Zustand ab und spezifizieren gerade das System, seine unveränderlichen Eigenschaften.

In der Quantenmechanik gibt es die unitäre Schar $U_t = e^{-\frac{i}{\hbar} t H}$ als dynamische Gruppe von Abbildungen des Hilbertraumes auf sich; die zeitabhängige Wahrscheinlichkeit der Proposition P_Δ , wenn der Zustand bei $t = t_0$ durch W_{t_0} gegeben ist, lautet:

$$w_\Delta(t+t_0) = \text{Tr}(P_\Delta U_t W_{t_0} U_t^{-1}) = \text{Tr}(U_t^{-1} P_\Delta U_t W_{t_0}) \quad (d6)$$

Das läßt wieder die Interpretation von zeitabhängigen Zuständen $W_{t+t_0} = U_t W_{t_0} U_t^{-1}$ oder zeitabhängigen Propositionen $P_{\Delta t+t_0} = U_t^{-1} P_\Delta U_t$ zu (Schrödinger- oder Heisenbergbild). Die Abbildung $P_\Delta \rightarrow U_t^{-1} P_\Delta U_t$ induziert einen Automorphismus (d4) für den durch die Projektoren dargestellten Verband. Wir lernen aus den beiden Fällen, daß wir bei allgemeineren Verbanden - etwa Unterräume im Quaternionen-Hilbertraum - nach den Verbandsautomorphismen fragen müssen zur Einführung einer dynamischen Gruppe. Deren allgemeinste Form wird für die komplexe Quantenmechanik durch das Theorem von Wigner [8] festgelegt: Alle Abbildungen, die die Unterraumstruktur (Relationen zwischen Propositionen) gemäß (d4) invariant lassen, - oder gleichwertig den Betrag von Skalarprodukten oder grob gesagt die Wahrscheinlichkeiten - werden durch unitäre oder antiunitäre Operatoren induziert, die bis auf einen Phasenfaktor eindeutig sind. Da die dynamische Gruppe für $t \rightarrow 0$ stetig in die Identität übergehen soll, kommen im komplexen Fall nur die unitären Operatoren in Frage.

Über die dynamische Gruppe hinaus haben die Automorphismen Bedeutung; transformiert man nicht entweder Propositionen oder Zustände - also beides relativ zu einander - wie bei der Zeitevolution, sondern alle Größen simultan, dann sind Wahrscheinlichkeiten invariant, und man spricht von einer äquivalenten Darstellung des Verbandes. Sind insbesondere die Elemente der dynamischen Gruppe invariant unter einem Automorphismus, so liegt eine Symmetrie vor. Zu abstrakten Symmetriegruppen muß man also Darstellungen durch Verbandsautomorphismen aufsuchen, das sind im komplexen Hilbertraum unitäre Darstellungen bis auf einen Phasenfaktor (Projektive Darstellung).

e) Kanonische Quantisierung

Die kanonische Quantisierung (von bosonischen Systemen) ist ein Verfahren, das zu einer klassischen Theorie ein Quantensystem liefert, das diese als Limes hat; das heißt genauer, daß man Zustände angeben kann, bei denen sich die nicht-Boole'sche Struktur der quantenmechanischen Propositionen in den Wahrscheinlichkeiten vernachlässigbar auswirkt, und die

gleichen Wahrscheinlichkeiten in guter Näherung vom klassischen System und seinen Propositionen gegeben werden. Daraus ergibt sich insbesondere eine Korrespondenz zwischen quantenmechanischen Propositionen, also Unterräumen im Hilbertraum, und klassischen Teilmengen.

Das klassische System ist gegeben durch eine $2n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit P , den Phasenraum, und die darauf definierte Hamiltonfunktion, die die Dynamik erzeugt; außerdem existiert eine symplektische Struktur in Form einer geschlossenen Zweiform [12]. Damit ist gemeint: Wenn wir P mit Koordinaten $(x^1, \dots, x^{2n})$ versehen, gibt es noch einen nichtsingulären antisymmetrischen Tensor $\Theta_{ik}(x)$, der die Integrabilitätsbedingung $\partial_{[k} \Theta_{ik]} = 0$ erfüllt. Das ist zunächst überraschend. Wegen der Geschlossenheit können wir aber Koordinaten so wählen, daß Θ_{ik} konstant wird und die Komponenten hat

$$\Theta_{ik} = \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & -1_{n \times n} \\ 1_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{pmatrix} \quad (e1)$$

Für die Koordinaten, in denen Θ_{ik} diese Form hat, führen wir die Bezeichnung ein

$$(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}, \dots, x^{2n}) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) \quad (e2)$$

Die symplektische Struktur liegt in der üblichen Notation in der Unterscheidung und Zuordnung zwischen Koordinaten und Impulsen verborgen; sie spiegelt in gewisser Weise noch die Herkunft des Hamilton-Prinzips von einem Lagrange-Prinzip mit nur n unabhängigen Variablen wieder. Mit Hilfe von Θ lauten die klassischen Bewegungsgleichungen:

$$\Theta_{ik} \frac{dx^k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x^i} \quad i, k = 1, \dots, 2n \quad (e3)$$

oder in q_r und p_r $r = 1, \dots, n$

$$\frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \quad \frac{\partial q_r}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_r} \quad (e4)$$

Koordinatensysteme, in den (e1) gilt, heißen kanonische Variable; zwischen ihnen vermitteln kanonische Transformationen, die sich genau dadurch auszeichnen, daß sie (e1) erhalten. Die Form Θ definiert auch die Poissonklammer, eine zweistellige Verknüpfung auf der Menge der skalaren Funktionen auf P (den klassischen Observablen):

$$\begin{aligned}
 [f, g]_{\text{P.K.}} &= \Theta^{ik} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^k} \\
 \Theta^{ik} \Theta_{ke} &= \delta^i_e, \text{ d.h. mit (e1)} \\
 \Theta^{ik} &= -\Theta_{ik}
 \end{aligned}
 \tag{e5}$$

Speziell gilt für die Koordinatenfunktionen:

$$[x^i, x^k]_{\text{P.B.}} = \Theta^{ik} \tag{e6}$$

und die Bewegungsgleichung lautet:

$$\dot{x}^i = [x^i, H]_{\text{P.K.}} \tag{e7}$$

Die P.K. -Verknüpfung hat alle Eigenschaften eines Lie-Produkts, und mit (e7) ist die klassische Dynamik ganz durch diese Verknüpfung ausgedrückt; eine Integration durch Iteration der Lie-Klammer ergibt die dynamische Gruppe D_t aus (d3).

Eine Lie-Struktur gibt es auch im Raum der quantenmechanischen Observablen, nämlich den Kommutator gebildet mit dem gewöhnlichen assoziativen Produkt. Allerdings ist der Kommutator zweier hermitescher Observabler antihermitesch und man benötigt einen imaginären Vorfaktor:

A, B hermitesche Operatoren im $\mathbb{C}$ -Hilbertraum

$$(A, B) \rightarrow -\frac{i}{\hbar} (AB - BA) \tag{e8}$$

(e8) ist nun eine Verknüpfung in der Menge der Hilbertraumobservablen, die dieselbe algebraische Struktur hat wie (e5). Während zur Definition von (e5) die fundamentale Form Θ einging, wurde in (e8) eine fundamentale imaginäre Konstante $\frac{i}{\hbar}$ benötigt; hier ist es also wesentlich, sich die quantenmechanischen Operatoren im komplexen Hilbertraum vorzustellen.

Eine enge Analogie besteht auch im Verhalten von Θ und $\frac{i}{\hbar}$ unter Zeitumkehrtransformationen. Denken wir uns eine Lösung $x^i(t)$ der klassischen Gleichung

$$\frac{dx^i}{dt} = \theta^{ik} \frac{\partial H}{\partial x^k} \quad \leftarrow (e3)$$

gegeben. Für $x'^i(t) = x^i(-t)$ lautet sie:

$$\frac{dx'^i}{dt} = -\theta^{ik} \frac{\partial H}{\partial x^k},$$

das Vorzeichen zerstört die Forminvarianz. Andererseits transformiert sich θ^{ik} unter allgemeinen (nichtkanonischen) Koordinatentransformationen:

$$\begin{aligned} \tilde{x}^i &= \tilde{x}^i(x^e) \\ \tilde{\theta}^{ik} &= \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^e} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^m} \theta^{em} \end{aligned} \quad (e9)$$

Nennen wir Transformationen antikanonisch, wenn gilt: $\tilde{\theta}^{ik} = -\theta^{ik}$. Dann ist die Bewegungsgleichung forminvariant unter $x^i \rightarrow x'^i$ kombiniert mit einer antikanonischen Transformation. Speziell ist die übliche Zeitumkehr

$$\begin{aligned} q_{iT}(t) &= q_{iT}(-t) \\ p_{iT}(t) &= -p_{iT}(-t) \end{aligned} \quad (e10)$$

eine solche Kombination, unter der die Gleichung invariant ist, weil der Operator $\frac{d}{dt}$ und θ^{ik} sich pseudoskalar transformieren. Das Gleiche gilt für $\frac{d}{dt}$ in der Quantentheorie, indem die quantenmechanische Zeitumkehr antiunitär dargestellt wird.

Die kanonische Quantisierung postuliert, daß es zu jeder fundamentalen klassischen Observable x^i eine quantenmechanische $\hat{x}^i$ gibt, und daß deren Lie-Produkt Relationen isomorph zu (e6) sind:

$$\begin{aligned} -\frac{i}{\hbar} (\hat{x}^i \hat{x}^k - \hat{x}^k \hat{x}^i) &= \theta^{ik} = [x^i, x^k]_{p.k.} \\ &= -\frac{i}{\hbar} [\hat{x}^i, \hat{x}^k] \end{aligned} \quad (e11)$$

Man sieht auch, daß der Vorfaktor $\frac{i}{\hbar}$ dimensionsbehaftet ist. $\hat{x}^i$ erhält die gleiche Dimension wie x^i , da die Erwartungswerte im klassischen Limes die klassischen Größen ergeben sollen. Da die algebraische Opera-

tion der Kommutatorbildung dimensionslos ist, die Poissonklammer wegen der Ableitungen aber die Dimension einer inversen Wirkung besitzt, muß $\frac{i}{\hbar}$ diese Dimension "übernehmen". Relation (e11) hat im Gegensatz zu (e6) in der klassischen Theorie eine direkte kinematische Bedeutung: sie sagt welche Observablen nicht kompatibel sind. Auch die Dynamik des Quantensystems wird durch den Übergang P.K. $\rightarrow$ Kommutator und (e7) geliefert:

$$\dot{\hat{X}}^i = -\frac{i}{\hbar} [\hat{X}^i, H(\hat{X}^i)] \quad (e12)$$

Die dynamische Gruppe lautet dann:

$$U_t = e^{-\frac{i}{\hbar} t H(\hat{X}^i)} \quad (e13)$$

ist also unitär wie es der allgemeine Formalismus ((d6)) erfordert. Damit ist ein Quantensystem gegeben. Eine irreduzible Darstellung ist die Schrödingersche; da die Operatoren $\hat{X}^1, \dots, \hat{X}^n$ wegen der Form von Θ^{ik} vertauschen, können wir sie als Multiplikationsoperatoren $X^1, \dots, X^n$ darstellen im Hilbertraum der quadratintegrablen Funktionen $\Psi(X^1, \dots, X^n)$. Die Wahl $\hat{X}^{n+i} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial X^i}$ ergibt dann eine Realisierung der Algebra (e9). Für endlich viele Freiheitsgrade kann man zeigen, daß alle irreduziblen Realisierungen von (e9) unitär äquivalent sind. Insbesondere gelangt man ausgehend von anderen klassischen kanonischen Variablen zu einer äquivalenten Darstellung des Systems, die Konstruktion ist in diesem Sinn invariant unter kanonischen Transformationen. Es scheint nicht klar, ob man diese Invarianz auch auf allgemeine Koordinatentransformationen im Phasenraum, die auf ein nichtkanonisches $\Theta^{ik}(x)$ führen, ausdehnen kann, ob die Konstruktion also koordinatenunabhängig ist.

Nachdem die Quantisierung über die kanonischen Koordinaten $X^i \rightarrow \hat{X}^i$ etabliert wurde, wollen wir noch die elementarerer Propositionen betrachten. Mit der Einführung von kanonischen Koordinaten geht einher die eindeutige Zerlegung von Teilmengen Δ des Phasenraums:

$$\Delta = Q \cap P \quad (e14)$$

wobei Q und P von der Form sind:

$$Q = \{ (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) \mid (q_1, \dots, q_n) \in \Delta_1 \subset \mathbb{R}^n, p_r \text{ beliebig} \}$$

$$P = \{ (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) \mid (p_1, \dots, p_n) \in \Delta_2 \subset \mathbb{R}^n, q_r \text{ beliebig} \}$$

also jeweils nur die eine Hälfte der Koordinaten in einer Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ lokalisieren. Propositionen der Art Q bzw. P bilden unter sich jeweils einen Unterverband, den der Orts- bzw. Impulspropositionen. Diese klassischen Unterstrukturen bleiben bei der Quantisierung erhalten; es gibt also zu jeder Menge Q einen Projektor E_Q und die Zuordnung ist ein Verbandsisomorphismus vom Teilmengenverband der Ortspropositionen auf einen Unterverband von Hilbertraumprojektoren:

$$E_{Q^1} = 1 - E_Q$$

$$Q_1 \subset Q_2 \Leftrightarrow E_{Q_2} E_{Q_1} = E_{Q_1} \quad (e15)$$

und genauso gibt es Projektoren F_P zu P . Man gewinnt sie aus der Spektralzerlegung der Observablen $\hat{q}_r$ bzw. $\hat{p}_r$. In der Schrödingerdarstellung haben wir:

$$(E_Q \psi)(q_1, \dots, q_n) = \begin{cases} \psi(q_1, \dots, q_n) & \text{falls } (q_1, \dots, q_n) \in Q \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und (e16)

$$(F_P \psi)(q_1, \dots, q_n) = \int d^n q' F_P(q_1 - q'_1, \dots, q_n - q'_n) \psi(q'_1, \dots, q'_n)$$

$$F_P(q_1 - q'_1, \dots, q_n - q'_n) = \int_P \frac{d^n p}{(2\pi\hbar)^n} e^{\frac{i}{\hbar} p_r (q_r - q'_r)}$$

Die klassischen Mengen werden also abgebildet in die Trägermenge der Wellenfunktion bzw. ihrer Fourierkomponenten. Die Einbettung der klassischen Q und P Unterverbände bringt zum Ausdruck, daß bei der Quantisierung die reinen Orts- bzw. Impulsmessungen klassisch bleiben, also eine gewisse Einschränkung an den Grad der Quantisierung.

Abschließend stellen wir fest, daß, während die verbandstheoretische Definition von Quantensystemen das Zahlensystem der Hilbertraumdarstellung offenließ, die Konstruktion durch klassische Korrespondenz die imaginäre Einheit von Anfang an in der Theorie explizit verankert. Dies hatte FJSS in den klassischen Überlegungen zur Quaternionentheorie veranlaßt, eine analoge Größe als expliziten Freiheitsgrad einzuführen.

f) Zusammenfassung

Wir haben in diesem Abschnitt die abstrakte Aussagenverbandsstruktur von klassischen und quantenmechanischen Theorien aufgezeigt. Das mathematische Abbild von denkbaren experimentellen Propositionen sind im einen Fall Untermengen im Phasenraum, im anderen Untervektorräume im Hilbertraum. Aus diesen einfachsten ja-nein Observablen kann man in beiden Fällen prinzipiell Observablen mit komplizierterem Spektrum aufbauen bzw. solche in (im Quantenfall kompatible) Propositionen zerlegen. Auf der Menge der Propositionen sind die Verbandsoperationen gegeben, die nur bei klassischen Systemen distributiv sind.

Unter einem reinen Zustand verstanden wir klassisch einen Punkt im Phasenraum, quantenmechanisch eine Richtung im Hilbertraum. Der (reine) Zustand ordnet allen Propositionen eine Wahrscheinlichkeit zu, die aber im klassischen Fall entartet und nur die Werte 0 und 1 annimmt, je nachdem ob der Zustandspunkt in der Teilmenge zu der Proposition liegt oder nicht; quantenmechanisch liefert sozusagen der Winkel zwischen Zustandsrichtung und deren Projektion auf den Teilraum die Wahrscheinlichkeit. Die Dynamik, die physikalisch die zeitliche Veränderung der Wahrscheinlichkeiten bewirkt, wird durch eine einparametrische Schar von Automorphismen des Verbands gegeben; das sind Bijektionen, die alle Verbandsrelationen erhalten, klassisch induziert durch Bijektionen des Phasenraumes auf sich, quantenmechanisch durch unitäre Abbildungen des Hilbertraums auf sich. Die hier beschriebene Quantenmechanik kann man in Hilberträumen über den Körpern $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{Q}$ darstellen.

Ein in diesem Rahmen spezieller Zugang zu einer Quantentheorie ist die kanonische Quantisierung. Dazu ist ein klassisches Modell gegeben, dessen Dynamik eine symplektische Struktur beinhaltet, die es erlaubt, auf der Menge der Observablen ein Lie-Produkt einzuführen; das ist immer der Fall, wenn die klassische Dynamik von einem Lagrange-Variationsprinzip abstammt. Ein Lie-Produkt kann man auch für Observablen im $\mathbb{C}$ -Hilbertraum definieren, wobei der Skalar i eingeht. Man fordert nun eine Korrespondenz zwischen gewissen fundamentalen klassischen und quantenmechanischen Observablen und die Gleichheit ihrer Lie-Produkte. Diese Observablen, die kanonischen Koordinaten und Impulse, besitzen kontinuierliche Spektren, sind also aus vielen Propositionen "zusammengebaut". Daß

die Korrespondenz auf diesem hohen Niveau besteht, führt dazu, daß die Propositionensysteme, die die einzelnen Observablen aufbauen, klassisch und quantisiert als Unterverbände isomorph sind.

III. Komplexe Zahlen in der Quantenmechanik

a) Eichinvarianz und klassische Mechanik

Wir haben durch die Abstraktionen im letzten Kapitel Vorstellungen entwickelt, wie eine allgemeinere Quantentheorie als Verband von Untervektorräumen aussehen könnte. Nicht der allgemeine Formalismus sondern das Prinzip der klassischen Korrespondenz und kanonischen Quantisierung erfordert in seiner üblichen Form gerade den komplexen Hilbertraum. Als nächstes wollen wir jetzt die Stellung der elektromagnetischen Phasen, die mit dem Eichprinzip verbunden sind, klären. Dazu betrachten wir zunächst als einfachstes System ein nichtrelativistisches spinloses Teilchen im äußeren Feld. Sein klassischer Phasenraum sei in der Notation von (IIe) mit kanonischen Koordinaten versehen:

$$(x^1, \dots, x^6) = (q_1, q_2, q_3; p_1, p_2, p_3)$$

$$\Theta_{ik} = \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} & -1_{3 \times 3} \\ 1_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix} \quad i, k = 1, \dots, 6; \quad H = H(x^i, t) = H(q_r, p_r, t)$$

Wir ermitteln die Form einer beliebigen infinitesimalen kanonischen Transformation:

$$\tilde{x}^i = x^i + \delta x^i \quad (a1)$$

Kanonisch heißt nach (IIe), daß die Komponenten der Zweiform Θ ihre spezielle konstante Form behalten: $\tilde{\Theta}_{ik} = \Theta_{ik}$. Daraus folgt dann durch direkte Rechnung:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Theta_{ke} \delta x^e - \frac{\partial}{\partial x^k} \Theta_{ie} \delta x^e = 0$$

Deshalb gibt es eine Funktion :

$$\Theta_{ie} \delta x^e = \frac{\partial \delta q}{\partial x^i} \Rightarrow \delta x^e = \Theta^{ei} \frac{\partial \delta q}{\partial x^i} = [x^e, \delta q]_{P.K.}$$

$$\tilde{x}^i = x^i + [x^i, \delta q]_{P.K.} \quad (a2)$$

Das ist in unserer Notation das bekannte Ergebnis, daß die Transformationen durch eine Erzeugende $\delta q(x^i, t)$ und das klassische Lie-Produkt (Poisson Klammer) gegeben sind. Ebenso kann man nachrechnen, daß die Dynamik in den neuen Koordinaten durch die Hamiltonfunktion

$$\tilde{H}(\tilde{x}^i, t) = H(x^i, t) + \frac{\partial \delta q}{\partial t} \quad (a3)$$

beschrieben wird

Die Menge der erzeugenden Funktionen bildet mit der Poisson Klammer eine (unendlichdimensionale) Lie-Algebra, und (a2) und (a3) sind Darstellungen dieser abstrakten Algebra durch Transformationen der Koordinaten und der Hamiltonfunktion; die Vorschrift (a2) bedeutet, daß sich die Koordinatenfunktionen mit der adjungierten Darstellung transformieren. Eine Unteralgebra bzw. Untergruppe in endlicher Form sind die Symmetrietransformationen, für die man verlangt, daß die Dynamik ihre Form behält:

$$\tilde{H}(\tilde{x}^i, t) = H(\tilde{x}^i, t) \quad (a4)$$

Aus (a3) und (a4) folgt dann:

$$\begin{aligned} H(\tilde{x}^i, t) &= H(x^i + [x^i, \delta q]_{P.K.}, t) = H(x^i, t) + [H(x^i, t), \delta q]_{P.K.} \\ &\stackrel{!}{=} H(x^i, t) + \frac{\partial \delta q}{\partial t} \Rightarrow \\ 0 &= \frac{\partial \delta q}{\partial t} + [\delta q, H] = \frac{d \delta q}{dt} \end{aligned} \quad (a5)$$

Die zugehörigen erzeugenden Funktionen sind also zeitunabhängig.

Eine andere (abelsche) Unteralgebra bilden die Funktionen, die in einem gewissen kanonischen Koordinatensystem nur von den Ortskoordinaten abhängen. Für $\delta f_a = \delta f_a(q_r, t)$ gilt wegen der kanonischen Form von Θ^{ik}

$$[\delta f_1, \delta f_2] = \Theta^{ik} \frac{\partial \delta f_1}{\partial x^i} \frac{\partial \delta f_2}{\partial x^k} = 0 \quad (a6)$$

Sie erzeugen die Transformationen:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{q}_r \\ \tilde{p}_s \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} q_r \\ p_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \delta f}{\partial q_r} \\ \frac{\partial \delta f}{\partial p_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_r \\ p_s - \frac{\partial \delta f}{\partial q_s} \end{pmatrix} \\ \tilde{H}(\tilde{q}_r, \tilde{p}_s, t) &= H\left(\tilde{q}_r, \tilde{p}_s + \frac{\partial \delta f}{\partial q_s}, t\right) + \frac{\partial \delta f}{\partial t}(\tilde{q}_r, t) \end{aligned} \quad (a7)$$

(a7) zeigt, daß die abelschen Transformationen i.a. keine Symmetrien sind. Zu konstanten δf gehört die Identitätstransformation, d.h. als Kern der Darstellung erzeugen sie triviale "Symmetrien". Wir können nun bereits hier im klassischen Bereich die Einführung eines äußeren elektromagnetischen Feldes als Ausbau dieser "globalen Symmetrie" zu einer (nicht mehr trivialen) lokalen verstehen.

Wir führen durch die sogenannte Minimalkopplung ein elektromagnetisches Potential $(A_0(q_r, t), A_s(q_r, t))$ ein

$$H(q_r, p_s, t) \rightarrow H^A(q_r, p_s, t) = H(q_r, p_s + \frac{e}{c} A_s, t) + e A_0 \quad (a8)$$

und wollen jetzt den Symmetriebegriff weiter fassen: Eine kanonische Transformation heiße Symmetrie, wenn es zu ihr eine Transformation des äußeren Potentials $A_\mu(q_r, t) \rightarrow A'_\mu(q_r, t)$ gibt, so daß statt (a4) gilt:

$$\tilde{H}^{A'}(\tilde{x}^i, t) = H^A(\tilde{x}^i, t) \quad (a9)$$

Es soll also eine Vorschrift geben, nach der sich das äußere Feld mittransformiert. An (a7) kann man ablesen, daß die gesamte durch beliebige ortsabhängige Erzeugende gegebene Algebra Symmetrien in diesem Sinn erzeugt, wenn sich A_μ transformiert:

$$(A'_0, A'_r) = (A_0 - \frac{1}{c} \frac{\partial \delta f}{\partial t}, A_r - \frac{c}{e} \frac{\partial \delta f}{\partial q_r}) \quad (a10)$$

Da die Maxwell Gleichungen für das A_μ -Feld unter (a10) invariant sind, ist das Gesamtsystem eichinvariant im Sinne einer lokalen, unendlich-parametrigen Gruppe. Wir können dies übersichtlich in einem kommutativen Diagramm zusammenfassen:

$$\begin{array}{ccc} x^i(t_1) & \longleftrightarrow & \tilde{x}^i(t_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ x^i(t_2) = & \longleftrightarrow & \tilde{x}^i(t_2) = \\ D_{t_2, t_1}^A(x^i(t_1)) & & D_{t_2, t_1}^{A'}(\tilde{x}^i(t_1)) \end{array} \quad (a11)$$

D_{t_2, t_1}^A ist der Evolutionsoperator im Potential A , der durch Integration der Bewegungsgleichung mit Hamiltonfunktion (a8) die Bewegung eines Phasenraumpunktes in der Zeit von t_1 nach t_2 beschreibt. $D_{t_2, t_1}^{A'}$ ist derselbe Operator im ungeeichten Potential A' . " $\longleftrightarrow$ " bedeutet Zusammenhang durch Koordinatentransformation erzeugt von $\delta f(q, t)$.

Aus dem Gesagten folgt, daß die Werte, die man für kanonische Impulse P_s mißt, eichabhängig sind; einer gewissen Proposition (Teilmenge des Phasenraums) entsprechen je nach Eichung verschiedene P_s Koordinatenwerte. Das Eichprinzip besagt also, daß man mit einem gegebenen Experiment keine absoluten P_s Werte assoziieren kann. Tatsächlich mißt man den sogenannten kinetischen Impuls $\pi_s = P_s + \frac{e}{c} A_s$, der direkt mit der Geschwindigkeit zusammenhängt. Gibt man die Werte von A_μ vor - das entspricht der Wahl einer Eichung - , dann kann man erst P_s messen. Das äußere Potential, bzw. sein eichabhängiger Anteil, geht also in den Zusammenhang zwischen praktischen Messungen und Teilmengen des Phasenraumes ein.

b) Eichinvarianz und Quantisierung

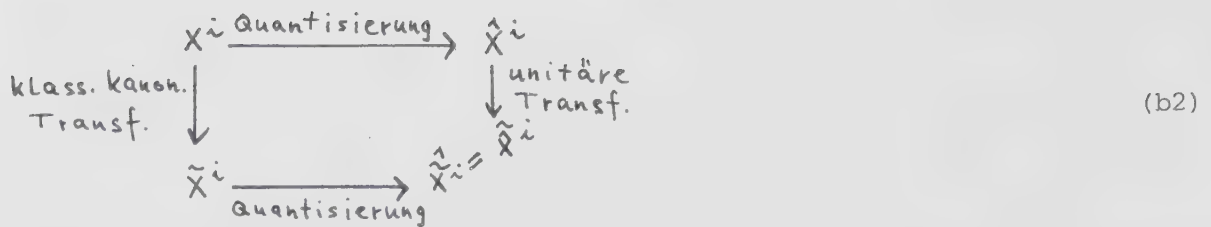
Die Betrachtung der Eichinvarianz im letzten Abschnitt überträgt sich in die kanonisch quantisierte Theorie. Von einer klassischen kanonischen Transformation, gegeben durch eine Erzeugende $\delta f(x^i, t)$, geht man durch Substitution über zu einem Generator $\delta f(\hat{x}^i, t)$ im Hilbertraum, der in Korrespondenz zu (a2) die unitäre Transformation

$$\tilde{\hat{X}}^i = \hat{X}^i - \frac{i}{\hbar} [\hat{X}^i, \delta f(\hat{x}^i, t)] \quad (b1)$$

erzeugt. Wegen der algebraischen Gleichheit der fundamentalen Lie-Produkte wird i.a. die funktionale Abhängigkeit der $\tilde{\hat{X}}^i$ von $\hat{X}^i$ die gleiche sein wie die der klassischen $\tilde{X}^i$ von X^i , d.h.

$$\tilde{\hat{X}}^i = \hat{X}^i$$

und es ist somit das folgende Diagramm kommutativ:



Das Gleiche trifft für die Dynamik zu. Die Bewegungsgleichung im Heisenbergbild

$$\frac{d\hat{x}^i}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{x}^i, H(\hat{x}^i, t)]$$

transformiert sich in

$$\frac{d\tilde{x}^i}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\hat{x}^i - \frac{i}{\hbar} [\hat{x}^i, S] \right) = \frac{i}{\hbar} [\hat{x}^i, H(\hat{x}^i, t)] - \frac{i}{\hbar} [\hat{x}^i, \frac{\partial S}{\partial t}] \equiv \frac{i}{\hbar} [\tilde{x}^i, \tilde{H}(\tilde{x}^i, t)]$$

Das gleiche Resultat erhalten wir, wenn wir klassisch gemäß (a3) transformieren und anschließend quantisieren.

Schwierigkeiten kann es allerdings dadurch geben, daß in $\delta f(\hat{x}^i, t)$ von der klassischen Analogie her keine Reihenfolge der Faktoren festgelegt ist, die für die Quantenuminterpretation wesentlich ist. Insbesondere muß dann $\delta f(\hat{x}^i, t)$ nicht ohne weiteres hermitesch sein, obwohl $\delta f(x^i, t)$ reell ist, und überhaupt ist nicht jede Funktion der Operatoren $\hat{x}^i$ wohldefiniert, wenn dies für das klassische Gegenstück zutrifft. Aus diesem Dilemma gibt es keinen allgemeinen Ausweg, aber die üblicherweise betrachteten Erzeugenden und Observablen sind von so einfacher Form, daß die erwähnten Schwierigkeiten nicht auftreten oder durch einfache Vorschriften wie Symmetrisierung oder Normalordnung beseitigt werden können.

Speziell geht die abelsche Unter algebra der nur ortsabhängigen Erzeugenden $\delta f(q_r, t)$ "glatt" in unitäre Operatoren über, da alle vorkommenden Variablen kommutieren. Wir ordnen also einer beliebigen Ortsfunktion δf den unitären Operator $T_{\delta f}$ zu:

$$T_{\delta f} = 1 + \frac{i}{\hbar} \delta f(\hat{q}_r, t) \quad (b3)$$

und haben eine Darstellung im Hilbertraum. In der Schrödingerdarstellung sind die $\hat{q}_r$ diagonal und damit auch Funktionen von ihnen, und $T_{\delta f}$ als Operator auf den Wellenfunktionen lautet

$$(T_{\delta f} \psi)(q_r, t) = \left(1 + \frac{i}{\hbar} \delta f(q_r, t) \right) \psi(q_r, t) \quad (b4)$$

d.h. die beliebige Ortsfunktion $\delta f(q_r, t)$ geht hier nun ein als lokale Phasentransformation der Wellenfunktion. Genauer gesagt ist das eine Möglichkeit die Wellenfunktion zu transformieren. Direkt von physikalischer Bedeutung ist nur das Transformationsverhalten von Propositionen bzw. allgemeinen Observablen und den Dichteoperatoren, die sich genauso transformieren:

$$W \rightarrow T_{\delta f} W T_{\delta f}^{-1} \quad (b5)$$

Für einen reinen Zustand ist W ein eindimensionaler Projektor und wird üblicherweise repräsentiert durch einen normierten Vektor $|\psi\rangle$ aus seinem Bildbereich bzw. in der Schrödingerbasis durch die Wellenfunktion als Komponenten von $|\psi\rangle$. Wenn wir für $|\psi\rangle$ das Transformationsverhalten $|\psi\rangle \rightarrow T_{\delta f} |\psi\rangle$ vorschreiben, dann wird (b5) für $W = |\psi\rangle\langle\psi|$ induziert. Das Gleiche trifft aber auch zu mit:

$$|\psi\rangle \rightarrow e^{i\alpha[\delta f]} T_{\delta f} |\psi\rangle \quad (b6)$$

wobei α ein reelles Funktional ist. Man hat also eine für die Wahrscheinlichkeiten irrelevante Wahl zu treffen unter möglichen (projektiven) Transformationen der Zustandsvektoren. Die Wahl $\alpha = 0$ führt speziell zu der Konvention, daß Konstante δf , die klassisch und auch auf den W die Identität erzeugen, auf $|\psi\rangle$ Phasentransformationen $|\psi\rangle \rightarrow (1 + \frac{i}{\hbar} \delta f) |\psi\rangle$ erzeugen. Insofern entsprechen klassisch die in (a) recht künstlich eingeführten "trivialen Symmetrien" dem, was man oft globale Phaseninvarianz der Wellenfunktion nennt. Mit $\alpha = -\frac{1}{\hbar} \delta f(q_r=0)$ als Funktional von $\delta f(q_r, t)$ wirken konstante δf nicht auf die Wellenfunktion. Das zeigt, daß in der gewöhnlichen Quantenmechanik die Behauptung, daß durch das Eichfeld aus einer schon vorhandenen globalen Symmetrie eine lokale wird recht willkürlich ist. Hier wird das projektive Konzept der Quantenmechanik mit einer echten physikalischen Transformation vermischt.

Die Verträglichkeit der betrachteten Transformationen mit der Quantisierung führt direkt dazu, daß nach Einführung des elektromagnetischen Potentials auch in der Quantentheorie alle Transformationen (b3) zu Symmetrien werden im erweiterten Sinn:

$$\begin{array}{ccc}
 \hat{\chi}^i(t_1) & \longleftrightarrow & \tilde{\hat{\chi}}^i(t_1) = T_{\delta f} \hat{\chi}^i(t_1) T_{\delta f}^{-1} \\
 \downarrow \text{Evolution mit } H^R(\hat{\chi}^i, t) & & \downarrow \text{Evolution mit } H^{R'}(\tilde{\hat{\chi}}^i, t) \\
 \hat{\chi}^i(t_2) & \longleftrightarrow & \tilde{\hat{\chi}}^i(t_2) = T_{\delta f} \hat{\chi}^i(t_2) T_{\delta f}^{-1}
 \end{array} \quad (b7)$$

Man kann also sagen, daß die lokale Phase der quantenmechanischen Wellenfunktion wegen der Eichinvarianz nur relativ zur Wahl einer Eichung des äußeren Potentials definiert ist. Das gleiche gilt im klassischen wie quantisierten Fall für die kanonischen Impulse; im Schrödingerbild wird speziell die Transformation $p_s \rightarrow p_s - \frac{\partial \delta f}{\partial q_s}$ (a7) durch die Operation der lokalen Phasenfaktoren $(1 + \frac{i}{\hbar} \delta f)$ induziert, weil $\hat{p}_s$ die Darstellung $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_s}$ hat:

$$T_{\delta f} \hat{p}_s T_{\delta f}^{-1} = (1 + \frac{i}{\hbar} \delta f) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_s} (1 - \frac{i}{\hbar} \delta f) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_s} - \frac{\partial \delta f}{\partial q_s}$$

Die Unbestimmtheit der globalen Phase stammt dagegen von der Wahl eines repräsentierenden Vektors für einen eindimensionalen Unterraum. Diese Freiheit kann man benutzen, um über die Wirkung von ortsunabhängigen Erzeugenden δf auf die Zustandsvektoren frei zu verfügen.

c) Eichinvarianz in der Pfadintegralformulierung

In Anhang C ist gezeigt, daß man den Evolutionsoperator einer kanonisch quantisierten Theorie in der Schrödingerdarstellung formal geschlossen als Funktionalintegral schreiben kann. Für das betrachtete nichtrelativistische Teilchen im äußeren Potential $A_\mu(q, t)$ lautet diese Darstellung:

$$(U_{t_2 t_1}^R, \psi)(q'') = \int d^3 q' K^R(t_2, t_1; q'', q') \psi(q') \quad (c1)$$

$$\begin{aligned}
 K^R(t_2, t_1; q'', q') &= \int Dq(t) Dk(t) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} [k \cdot \dot{q} - H^R(q, k, \tau)] d\tau} \\
 &= \int Dq(t) Dk(t) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} [k \cdot \dot{q} - H(q, k, \tau) + \frac{e}{c} A_s, \tau) - e A_0] d\tau} \quad (c2)
 \end{aligned}$$

Die Funktionalintegration über $k_r(t)$ verschieben wir um die bezüglich dieser Integration konstante Funktion $\frac{e}{c} A_r(q(t), t)$:

$$\begin{aligned}
 K^R(t_2, t_1; q'', q') &= \int Dq(t) Dk(t) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} [(k - \frac{e}{c} A) \cdot \dot{q} - H(q, k, \tau) - e A_0] d\tau} \\
 &= \int Dq(t) \left\{ Dk(t) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} [k \cdot \dot{q} - H(q, p, \tau)] d\tau} \right\} e^{\frac{-ie}{\hbar c} \int c A_0 dt + A_r dq_r} \quad (c3) \\
 &= \int Dq(t) \phi[q(t); t_2, t_1] e^{-\frac{ie}{\hbar c} \int A_\mu dq^\mu}
 \end{aligned}$$

mit $q^\mu = (ct, q_r)$, $A_\mu = (A_0, A_r)$
 $\phi[q(t); t_2, t_1]$ ist die Amplitude des Weges $q(t)$ in Abwesenheit eines äußeren Potentials. Für eine Hamiltonfunktion

$$H(q_r, k_s) = \frac{k^2}{2m} + V(q)$$

kann man das Gaußintegral über $k(t)$ auswerten:

$$\begin{aligned}
 \phi[q(t); t_2, t_1] &= \int Dk(t) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} [k \cdot \dot{q} - \frac{k^2}{2m}] d\tau} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} V(q) d\tau} \\
 &= B e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} [\frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q)] d\tau} \quad (c4)
 \end{aligned}$$

wobei B ein wegunabhängiger Normierungsfaktor ist, der in das Maß der verbleibenden Integration über $q(t)$ absorbiert werden kann. (c4) ist die ursprünglich von Feynman angegebene Lagrange-Form des Pfadintegrals [15]. Hier wird über klassische Wege nur im Ortsraum integriert, und die Amplitude wird mit $\frac{i}{\hbar}$ und dem klassischen Wirkungsfunktional in Lagrange-Form gebildet.

Der Grund, warum wir die Pfadintegrale hier eingeführt haben, ist die Art des Eingehens von A_μ in (c3). Das äußere Potential bewirkt, daß in der kohärenten Summe jeder virtuelle Weg einen Extraphasenfaktor $e^{-\frac{ie}{\hbar c} \int A_\mu dq^\mu}$ erhält. Ein solcher nichtintegrierbarer Phasenfaktor [16] stellt eine zentrale Größe in der Differentialgeometrie der Faserbündel dar. Wir wollen dies in einem gruppentheoretisch allgemeineren Rahmen diskutieren und bei jedem Schritt auf die $U(1)$ -Phasen spezialisieren.

Wir denken uns in jedem Punkt X der Raumzeit einen "inneren" Vektorraum V_X über den reellen Zahlen von überall gleicher endlicher Dimension N gegeben, im Spezialfall die komplexe Ebene, in der die Werte der quantenmechanischen Wellenfunktion liegen. Diese Räume sind a priori als voneinander unabhängig anzusehen, und wir können in jedem V_X eine Basis $e_1(X), \dots, e_N(X)$ wählen, auf die wir die Komponenten der lokalen inneren Vektoren beziehen. Im Komplexen werden die Basisvektoren 1 und i genannt und der X -Index unterdrückt. Da die $\mathbb{C}$ -Zahlen außer einem Vektorraum einen Körper bilden, gibt es als zusätzliche Struktur die Multiplikation der Basiselemente und eine natürliche Norm, den Absolutbetrag. Die lokale Basis $1 \hat{=} 1_X$ und $i \hat{=} i_X$ ist bereits so gewählt, daß 1 und i überall die gleiche Multiplikationstabelle haben und normiert sind. Betrachten wir nun einen Weg γ von X nach Y in der Raumzeit, dann ist eine Übertragung eine eindeutige Abbildung zwischen V_X und V_Y , die i.a. wegababhängig ist (nichtintegrabel); sie definiert eine Parallelverschiebung von Vektoren aus V_X längs γ nach Y bzw. V_Y . Im allgemeinsten Fall, wenn man nur die Erhaltung von linearer Abhängigkeit unter der Verschiebung fordert, kann eine solche Abbildung ein Element der allgemeinen linearen Gruppe $GL(N, \mathbb{R})$ sein; gibt es weitere Strukturen der lokalen Räume V_X , die erhalten werden sollen, dann wird die Gruppe weiter eingeschränkt. Für $\mathbb{C}$ beschränkt die Forderung nach Erhaltung der natürlichen Norm die $GL(2, \mathbb{R})$ auf Transformationen der $SO(2) \cong U(1)$:

$$\begin{aligned} V_X \ni a 1_X + b i_X &\rightarrow (a \cos \alpha_{XY} - b \sin \alpha_{XY}) 1_Y \\ &\quad + (a \sin \alpha_{XY} + b \cos \alpha_{XY}) i_Y \in V_Y \quad (c5) \\ \text{oder } V_X \ni (a + b i_X) &\rightarrow e^{i_Y \alpha_{XY}} (a + b i_Y) \in V_Y \end{aligned}$$

unter Benutzung der Multiplikation in V_Y .

Allgemein gehört zum Weg γ ein Element einer Darstellung einer Lie-Gruppe, und die Vektoren werden parallelverschoben:

$$V_X \ni T = t^i e_i(X) \rightarrow \varphi[\gamma] T = (D^i_j[\gamma] t^j) e_i(Y) \in V_Y \quad (c6)$$

bzw. in Matrixschreibweise für die Komponenten:

$$t \rightarrow D[\gamma] t$$

Für die (stückweise differenzierbaren) Wege selbst kann auch eine Multiplikation definiert werden durch Aneinanderhängen soweit Endpunkt des ersten und Anfangspunkt des zweiten Weges gleich sind

$$\begin{aligned} \gamma_1 & \text{ von } x \text{ nach } y \\ \gamma_2 & \text{ von } y \text{ nach } z \\ \rightarrow \gamma_2 \circ \gamma_1 & \text{ von } x \text{ nach } z \end{aligned} \quad (c7)$$

Genau für diese Endpunktkonfiguration können auch die zugehörigen Gruppenelemente sinnvoll multipliziert werden, und wir fordern Verträglichkeit dieser beiden Verknüpfungen:

$$\begin{aligned} \varphi[\gamma_1] &: V_x \rightarrow V_y \\ \varphi[\gamma_2] &: V_y \rightarrow V_z \\ \varphi[\gamma_2 \circ \gamma_1] &\stackrel{!}{=} \varphi[\gamma_2] \varphi[\gamma_1] : V_x \rightarrow V_z \end{aligned} \quad (c8)$$

Wegen der Kontinuumsnatur der Raumzeit können wir einen Weg in viele kleine aneinandergehängte Segmente zerlegen, in ein Produkt von Elementen in der Nähe der Identität also im Sinne der Verknüpfung (c7):

$$\gamma = \Delta_n \circ \dots \circ \Delta_2 \circ \Delta_1 \quad (c9)$$

Das Gleiche gilt wegen (c8) für $\varphi[\gamma]$:

$$\varphi[\gamma] = \varphi[\Delta_n] \dots \varphi[\Delta_2] \varphi[\Delta_1] \quad (c10)$$

oder für die U(1)-Phase:

$$D[\gamma] = e^{i\alpha[\gamma]} = e^{i\alpha[\Delta_n]} \dots e^{i\alpha[\Delta_2]} e^{i\alpha[\Delta_1]} = e^{i \sum_k \alpha[\Delta_k]} \quad (c11)$$

Wenn wir annehmen, daß wir die Zerlegung im Limes mit unendlich vielen unendlich kleinen Segmenten durchführen können, genügt es die Übertragung für infinitesimale Wege $\Delta_i \cong dq^\mu_i$ zu kennen. Aus Stetigkeitsgründen hat sie die Form:

$$D[dq^\mu] = 1 + dq^\mu a_\mu^e(x) T_e : V_x \rightarrow V_{x+dq} \quad (c12)$$

wobei T_e die Operatoren der Lie-Algebra in der gegebenen Matrixdarstellung der Lie-Gruppe sind, und $D[x]$ lautet:

$$D[x] = \lim_{M \rightarrow \infty} (1 + dq_1^\mu a_\mu^e T_e) \dots (1 + dq_M^\mu a_\mu^e T_e) \\ = P \exp \left\{ \int dq^\mu a_\mu^e T_e \right\} \quad (c13)$$

P ist der Wegordnungsoperator; die Formel (c13) ergibt sich genauso wie das zeitgeordnete Produkt in Anhang C für den Evolutionsoperator. Für die abelsche $U(1)$ nimmt (c11) bzw. (c13) eine besonders einfache Form an:

$$D[x] = e^{i \int dq^\mu a_\mu} \quad (c14)$$

Es gibt nur einen Generator, dargestellt durch i , und der Index e ist daher unterdrückt. Wenn wir a_μ mit $-\frac{e}{\hbar c} A_\mu$ identifizieren, ist der Faktor der sich im Pfadintegral (c3) aus der quantisierten eichinvarianten Theorie ergeben hat, also genau ein nichtintegrierbarer Phasenfaktor.

Unter Eichtransformationen verstehen wir allgemein eine Transformation der lokalen Basis durch die betrachtete Gruppe:

$$\tilde{e}_i(x) = e_j(x) D^{-1}(x)^j_i$$

so daß die Komponenten in der neuen Basis lauten

$$\tilde{t}^i = D(x)^i_j t^j \quad \text{für } T = t^i e_i = \tilde{t}^i \tilde{e}_i \in V_x \quad (c15)$$

Dann ändert sich auch die Matrixdarstellung der Übertragung (c6):

$$\varphi[x]: V_x \rightarrow V_y \\ D[x] \rightarrow \tilde{D}[x] = D(y) D[x] D^{-1}(x) \quad (c16)$$

oder für die infinitesimalen Faktoren

$$\begin{aligned}
 (1 + dq^\mu a_\mu^e T_e) &\rightarrow D(x+dq) (1 + dq^\mu a_\mu^e T_e) D^{-1}(x) \\
 &\equiv 1 + dq^\mu [D(x) a_\mu^e T_e D^{-1}(x) + (\partial_\mu D(x)) D^{-1}(x)] \\
 &= 1 + dq^\mu \tilde{a}_\mu^e T_e
 \end{aligned} \tag{c17}$$

Das ist das gewohnte inhomogene Eichverhalten der Potentiale; der inhomogene Term reflektiert den ursprünglichen Zusammenhang mit Wegen und die eigentlich bilokale Transformation (c16).

Für die $U(1)$ ist die lokale Basistransformation wieder durch einen einfachen Phasenfaktor darstellbar: $D(x) = e^{i\alpha(x)}$ und die anderen Größen lauten:

$$\begin{aligned}
 D[x] &= e^{i\alpha[x]} \rightarrow \tilde{D}[x] = e^{i\alpha(y)} e^{i\alpha[x]} e^{-i\alpha(x)} \\
 \text{bzw. } D[x] &= e^{i\int dq^\mu a_\mu} \rightarrow \tilde{D}[x] = e^{i\int dq^\mu \tilde{a}_\mu} = e^{i\int dq^\mu (a_\mu + \partial_\mu \alpha)} \quad (c18)
 \end{aligned}$$

In diesem geometrischen Bild berücksichtigt also der Beifaktor $e^{-\frac{ie}{\hbar c} \int dq^\mu A_\mu}$ im Pfadintegral, daß die komplexen Ebenen an verschiedenen Orten nicht global zu identifizieren sind, sondern daß das äußere Feld eine solche Identifizierung in Abhängigkeit vom Weg definiert. Auch bewirkt der Faktor gerade das Eichverhalten:

$$\begin{aligned}
 A'_\mu &= A_\mu + \partial_\mu \alpha \\
 K^R(t_2, t_1; q'', q') &= \int Dq(t) \phi[q(t); t_2, t_1] e^{-\frac{ie}{\hbar c} \int dq^\mu A'_\mu} \\
 &= \int Dq(t) \phi[q(t); t_2, t_1] e^{-\frac{ie}{\hbar c} \int dq^\mu A_\mu} e^{-\frac{ie}{\hbar c} (\alpha(t_2, q'') - \alpha(t_1, q'))} \\
 &= e^{-\frac{ie}{\hbar c} \alpha(t_2, q'')} K^R(t_2, t_1; q'', q') e^{\frac{ie}{\hbar c} \alpha(t_1, q')}
 \end{aligned}$$

Das ist äquivalent zu (b7) in der Schrödingerdarstellung.

Es ist bemerkenswert, wie nichtintegrable Phasenfaktoren und die Pfadintegralform der Quantenmechanik zusammenpassen. Daß die Gruppe gerade $U(1)$ ist, ist letztlich Folge der kanonischen Quantisierung: das Gruppen- $\hat{\lambda}$ ist hier das quantenmechanische $\frac{i}{\hbar}$. Wenn von der Quantenmechanik Quaternionen in die Theorie gebracht werden, ist die Einführung eines analogen Potentials durch verallgemeinerte Phasenfaktoren wohl kein Problem, denn (c13) gilt für beliebige auch nichtabelsche Gruppen.

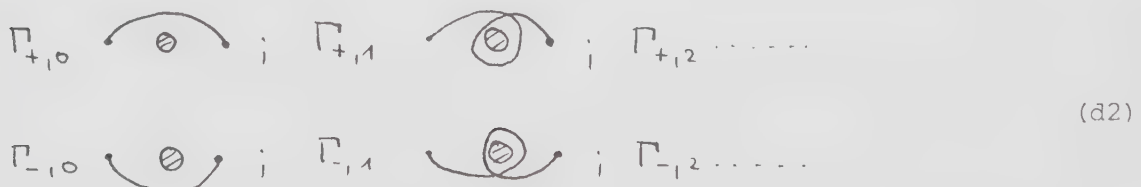
d) Die Rolle der Phasen beim Aharonov-Bohm Experiment [16,17]

Das Aharonov-Bohm Experiment bestätigt das im letzten Abschnitt beschriebene Zusammenspiel von Quantenmechanik und Eichfeldgeometrie, und läßt sich mit Hilfe von Ausdruck (c3) für den Zeitentwicklungsoperator leicht formal analysieren.

Elektronen propagieren von einer Quelle bei X zu einem Detektor bei Y . Als unendlich langer Zylinder gedacht befindet sich dazwischen ein Magnetfeld $\vec{B}$. Durch Blenden ist dafür gesorgt, daß keine Elektronen in den Feldbereich eindringen und die Wellenfunktion dort praktisch verschwindet.



Weil der Raum in dieser Situation nicht mehr einfach zusammenhängend ist, teilen wir die Wege von X nach Y in Homotopieklassen ein, wie folgende Skizze zeigt:

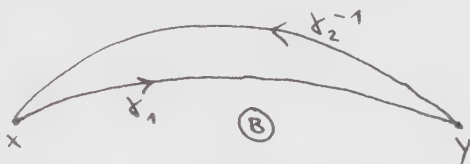


Die Wege der verschiedenen Klassen lassen sich nicht ineinander deformieren. Damit lautet der Propagationskern gemäß (c3):

$$K(t_2, t_1; q'', q') = \sum_{\substack{k=+, - \\ \ell=0, 1, \dots}} \int_{\Gamma_{k\ell}} Dq(t) \phi[q(t); t_2, t_1] e^{-\frac{ie}{\hbar c} \int dq^\mu A_\mu} \quad (d3)$$

Nun sieht man leicht, daß der elektromagnetische Phasenfaktor nur von der Klasse Γ abhängt: Seien γ_1 und γ_2 aus einer Klasse; dann ist $\gamma_2^{-1} \circ \gamma_1$ ein geschlossener Weg, zu dem es eine Fläche S gibt, die $\gamma_2^{-1} \circ \gamma_1$ als Rand hat und den Zylinder mit dem Magnetfeld nicht schneidet:

Beispiel :



(d4)

$$e^{-\frac{ie}{\hbar c} \int_{\gamma_2^{-1} \circ \gamma_1} dq^\mu A_\mu} = e^{-\frac{ie}{\hbar c} \int_S d\epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu}} = 1 \quad (d5)$$

mit Hilfe des Stokes'schen Satzes.

Andererseits gilt:

$$e^{-\frac{ie}{\hbar c} \int_{\gamma_2^{-1} \circ \gamma_1} dq^\mu A_\mu} = e^{-\frac{ie}{\hbar c} \int_{\gamma_1} dq^\mu A_\mu} e^{\frac{ie}{\hbar c} \int_{\gamma_2} dq^\mu A_\mu} \quad (d6)$$

Also sind die Phasen von γ_1 und γ_2 gleich, und wir führen für Wege aus $\Gamma_{k\ell}$ die Bezeichnung ein:

$$e^{-\frac{ie}{\hbar c} \int_{\gamma \in \Gamma_{k\ell}} dq^\mu A_\mu} = e^{i\alpha_{k\ell}} \quad (d7)$$

Wiederum durch Betrachten von geschlossenen Wegen finden wir:

$$\begin{aligned} \alpha_{+\ell} &= \alpha_{+0} - \ell\varphi \\ \alpha_{-\ell} &= \alpha_{+0} + (\ell+1)\varphi, \end{aligned}$$

ist: $\varphi = \frac{c}{u} \int \vec{A} \cdot d\vec{q} = \frac{e}{\hbar c} \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$ wo φ der magnetische Fluß




(d8)

Für den Propagator haben wir somit den übersichtlichen Ausdruck:

$$\begin{aligned}
 K(t_2, t_1; q'', q') &= \sum_{\substack{k=+, - \\ l=0, 1, \dots}} e^{i\alpha_{kl}} \int_{\Gamma_{kl}} Dq(t) \phi[q(t); t_2, t_1] \\
 &= \sum_{\substack{k=+, - \\ l=0, 1, \dots}} e^{i\alpha_{+,0}} (c_{+l} e^{-il\varphi} + c_{-l} e^{i(l+1)\varphi})
 \end{aligned} \tag{d9}$$

Wobei $c_{\pm l}$ die komplizierten von A_μ unabhängigen Pfadintegrale über die Wegklassen darstellen. Nur der Gesamtfaktor $e^{i\alpha_{+,0}}$ hängt von der Eichung von A_μ ab. Nehmen wir an, daß die "einfacheren" Wege aus $\Gamma_{+,0}$ und $\Gamma_{-,0}$ dominieren, dann vereinfacht sich K weiter:

$$K(t_2, t_1; q'', q') \approx e^{i\alpha_{+,0}} (c_{+,0} + c_{-,0} e^{i\varphi}) \tag{d10}$$

Man erkennt den periodisch von φ abhängenden Interferenzterm in der Wahrscheinlichkeit Elektronen in q'' emittiert von q' zu finden in Übereinstimmung mit dem Experiment.

e) Nichtintegrable Phasenfaktoren in der relativistischen Quantenmechanik

Obwohl in c) ein nichtrelativistisches Schrödingerteilchen betrachtet wurde, ist der Phasenfaktor, der den Einfluß des äußeren Feldes beschreibt, von relativistischer Form:

$$e^{-\frac{ie}{\hbar c} \int dq^\mu A_\mu} \tag{e1}$$

Wir wollen daher versuchen, eine ähnliche Formulierung für eine relativistische Kinematik zu finden; dabei bleiben wir bei einem festen äußeren Potential und erstquantisierten Teilchen beschrieben durch $\mathbb{C}$ -Zahl Wellenfunktionen. Dafür kommen bekanntlich die Klein-Gordon- und die Dirac-Gleichung in Frage:

$$\text{mit } i\hbar D_\mu = i\hbar \partial_\mu - e A_\mu, \quad c=1:$$

$$(i\hbar D_\mu)(i\hbar D^\mu)\psi = m^2 \psi \quad (e2)$$

$$\left. \begin{aligned} i\hbar \bar{S}^\mu D_\mu \psi &= m \chi \\ i\hbar \bar{S}^\mu D_\mu \chi &= m \psi \end{aligned} \right\} \quad (e3)$$

$$\bar{S}^\mu = (1, \vec{S}) \quad \bar{S}^\mu = (1, -\vec{S})$$

wobei die Dirac-Wellenfunktion durch ein Paar von zweikomponentigen Weyl-Spinoren gegeben ist. Neben den üblichen Problemen der erstquantisierten Theorie mit Lösungen negativer Energie und Antiteilchen ist es nicht ohne weiteres möglich eine Pfadintegralformel abzuleiten. Das liegt daran, daß keine der Raumzeit-Koordinaten geeignet ist, wie die nichtrelativistische Zeit, die Wege zu parametrisieren: wie wir aus der relativistischen Propagationstheorie [18] wissen, werden die Wellen durch das äußere Potential teilweise in der Zeit rückgestreut. Mit anderen Worten: die Gleichbehandlung von Raum und Zeit verbietet es i.a. sich auf Wege zu beschränken, deren Zeitkoordinate monoton vom Anfangs- zum Endpunkt wächst. Für die Klein-Gordon-Gleichung (e2) hat Feynman [19] eine interessante Lösung angegeben, die uns zu der gewünschten Formel analog zu (c3) verhilft. Statt (e2) betrachte man die Gleichung:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial u} \phi(u, q^\mu) = -\frac{1}{2} (i\hbar D_\mu)(i\hbar D^\mu) \phi(u, q^\mu) \quad (e4)$$

u ist ein skalarer Parameter, eine Art absolute Zeit, die die Rolle der nichtrelativistischen Zeit übernimmt. Spezielle Lösungen zu (e4) sind "stationär" in der absoluten Zeit:

$$\phi(u, q^\mu) = e^{\frac{i}{\hbar} \frac{m^2}{2} u} \psi(q^\mu) \quad (e5)$$

mit einer Lösung ψ der ursprünglichen Gleichung (e2). Umgekehrt folgt aus jeder Lösung ϕ eine Lösung von (e2) durch Fourier-Projektion:

$$\psi(q^\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} du e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{m^2}{2} u} \phi(u, q^\mu) \quad (e6)$$

Der Vorteil von (e4) besteht darin, daß sie formal der Schrödingergleichung entspricht mit u als Zeit und vier Raumzeitkoordinaten statt drei Raum-

koordinaten. Daher existiert auch eine formale Pfadintegraldarstellung für den Propagator bezüglich u :

$$K(u; q''^\mu, q'^\mu) = \int Dq^\mu(u) e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{1}{2} \int_0^u \left(\frac{dq^\mu}{du}\right)^2 du} e^{-\frac{ie}{\hbar} \int dq^\mu A_\mu} \quad (e7)$$

Integriert wird jetzt über Wege im Minkowskiraum von q'^μ nach q''^μ in der "Zeit" u ; dabei sind solche eingeschlossen, bei denen $\frac{dq^0}{du}$ das Vorzeichen wechselt, während u monoton wachsend den Weg parametrisiert. In [19] ist demonstriert, daß, wenn man $K(u; q'', q')$ für $u < 0$ gleich Null setzt (retardierter Propagator), die Projektion der m^2 -Komponente (e6) den Feynman-Propagator Δ_F ergibt im Fall $A_\mu = 0$; für $A_\mu \neq 0$ führt die Entwicklung des Phasenfaktors in e -Potenzen auf die Graphenregeln. Uns kam es hier nur darauf an zu zeigen, daß es auch für die relativistische Theorie eine Form gibt, die wie (c3) faktorisiert in eine freie, kinematische Amplitude pro Weg mal den nichtintegrablen Phasenfaktor. Dieser hat die gleiche Form wie in (c3), die ja bereits relativistisch war; die Klasse der Wege, für die er in (e7) auszuwerten ist, zeigen jedoch im Gegensatz zu (c3) die Gleichberechtigung von Raum und Zeit.

Die gleiche Form können wir für Dirac-Wellenfunktionen bekommen, wenn wir statt des Paares von Gleichungen (e3) die Gleichung zweiter Ordnung für den Zweikomponentenspinor ψ untersuchen:

$$\begin{aligned} (i\hbar \bar{\sigma}^\mu D_\mu)(i\hbar \sigma^\mu D_\mu) \psi &= m^2 \psi \\ &= \left[(i\hbar D_\mu)(i\hbar D^\mu) - \frac{1}{2} i e \hbar F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right] \psi \end{aligned} \quad (e8)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad \sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu)$$

(e8) ist zusammen mit der Definition:

$$\chi = \frac{1}{m} i \hbar \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi \quad (e9)$$

äquivalent zu dem Paar (e3).

Bis auf den $F_{\mu\nu}$ Term, der die zwei Spinorkomponenten koppelt und dem magnetischen Moment entspricht, ist (e8) ein Paar von Klein-Gordon-Gleichungen. Genau wie in (e4) führen wir den u -Parameter ein:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial u} \psi(u, q^\mu) = \left[-\frac{1}{2} (i\hbar D_\mu) (i\hbar D^\mu) + \frac{1}{4} i e \hbar F_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu} \right] \psi(u, q^\mu) \quad (e10)$$

Der magnetische Term macht bei der Konstruktion der Pfadsumme keine Schwierigkeiten, da er nur die Spinmatrizen und keine Ableitungen enthält. Das Ergebnis für den Propagator, der jetzt eine 2x2 Matrix ist, lautet:

$$K(u; q''^\mu, q'^\mu) = \int Dq(u) e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{1}{2} \int_0^u \left(\frac{dq^\mu}{du} \right)^2 du} e^{-\frac{ie}{\hbar} \int dq^\mu A_\mu} P e^{\frac{1}{4} \int_0^u e F_{\mu\nu}(q(u)) \Sigma^{\mu\nu} du} \quad (e11)$$

Wir finden wieder den Phasenfaktor im relativistischen Pfadintegral; außerdem beschreibt der Term mit dem Wegordnungsoperator P die Wirkung der Krümmung bzw. Feldstärke auf den Spin. Dabei entspricht bei jedem virtuellen Weg $q^\mu(u)$ jedem Wegsegment $dq^\mu = \frac{dq^\mu}{du} du$ ein Rotationsfaktor $(1 + \frac{1}{4} i e F_{\mu\nu}(q(u)) \Sigma^{\mu\nu} du)$; die Faktoren der aufeinanderfolgenden Segmente multiplizieren sich in der Ordnung von rechts nach links, und es ergibt sich wieder ein weggeordnetes Exponential wie in Anhang C. Interessanterweise wird in (e11) statt einer Phase eine hyperkomplexe Zahl, gegeben durch Spinmatrizen, für jeden Pfad überlagert. Für ein reines äußeres Magnetfeld lautet der Spinfaktor z.B:

$$P e^{-\frac{1}{2} i e \int_0^u \vec{B} \vec{\sigma} du}, \quad (e12)$$

entsprechend einer reinen Spindrehung ohne Boost. In diesem Fall überlagert man also eine Quaternionenamplitude in der Darstellung mit Paulimatrizen $i\vec{\sigma}$; das hat soweit aber nichts mit unserer angestrebten Quaternionenquantenmechanik zu tun. Die "Spinquaternionen" sind Operatoren, die auf die Wellenfunktion wirken und nicht das Analogon zur irrelevanten Phase der Wellenfunktion, die durch die projektive Darstellung der Propositionen bedingt ist. Außerdem gibt es neben den Quaternionen $i\vec{\sigma}$, die ja für sich eine Divisionsalgebra bilden, das mit ihnen kommutierende komplexe i . Dennoch ist es mathematisch interessant, daß hier für die Propagation der Wellenfunktion die kohärente Überlagerung von Quaternionen eine Rolle spielt.

f) Zusammenfassung

Schon beim klassischen nichtrelativistischen Teilchen entsteht durch die minimale Einkopplung des elektromagnetischen Potentials Eichinvarianz; es handelt sich um Invarianz in einem erweiterten Sinn, da das äußere Potential mittransformiert wird. Die Eichtransformationen entsprechen der unendlichen Lie-Algebra von impulsunabhängigen erzeugenden Funktionen. Diese abelsche Algebra geht bei der Quantisierung über in hermitesche Generatoren bzw. unitäre Transformationen in endlicher Form. Diese wirken speziell in der Schrödingerdarstellung bei geeigneter Wahl der Gesamtphase als lokale Multiplikation der Wellenfunktion mit einem Phasenfaktor $e^{i \int \delta f(q_r) dq_r}$, wenn $\delta f(q_r)$ die klassische erzeugende Funktion ist.

Anschließend untersuchten wir die Dynamik im Eichfeld weiter in der Schrödingerdarstellung, wo sich der endliche Zeitentwicklungsoperator als Feynman-Pfadintegral schreiben läßt. In dieser Form ist der Effekt des Eichpotentials durch seinen nichtintegrablen Phasenfaktor klar zu sehen und geometrisch interpretierbar, da er einfach abfaktoriert und als zusätzliches Gewicht in der Pfadsumme steht. Das Aharonov-Bohm Experiment ist ein schönes Beispiel für das Zusammenwirken von Quanteneffekten und nichtintegrablen Phasenfaktor. Schließlich konnten wir auch für erstquantisierte Klein-Gordon- und Dirac-Teilchen im äußeren Feld eine ähnlich faktorisierte Form herleiten. Neben den üblichen Problemen der erstquantisierten relativistischen Theorie mußten wir den Wellengleichungen durch Einführen einer absoluten Zeit u allerdings etwas "Gewalt antun" um eine solche Pfadintegralform zu finden.

IV. Komplexe Zahlen in der Quantenfeldtheorie

a) Quantisierung des reellen Skalarfeldes

Bisher gingen wir von klassischen Systemen aus, deren Konfigurations- bzw. Phasenraum durch n bzw. $2n$ reelle Koordinaten parametrisierbar war: Punkt im Konfigurationsraum $\leftrightarrow n$ Werte q_s , $s = 1, \dots, n$. In der klassischen Feldtheorie gehen wir vom Abzählindex s zu einem Kontinuumsindex über; Konfigurationen sind durch Werte einer Feldfunktion im Raum gegeben: $\varphi_{\vec{x}} = \varphi(\vec{x})$. Die Werte der verallgemeinerten Ortskoordinaten q_s entsprechen also der Feldauslenkung φ und der Index s den kontinuierlichen Parametern $\vec{x}$, die als Dreiervektoren genommen sind um am Ende eine physikalische Theorie im Minkowskiraum zu bekommen. Um eine klassische Dynamik zu definieren brauchen wir in Verallgemeinerung der Lagrange-Funktion $L(q_s, \dot{q}_s)$ ein Lagrange-Funktional

$$L = L[\varphi(\vec{x}), \dot{\varphi}(\vec{x})]$$

mit dessen Hilfe wir nun zu einer beliebigen Bahn $\varphi(t, \vec{x})$, $t_1 \leq t \leq t_2$ durch den Konfigurationsraum die Wirkung bestimmen können:

$$S[\varphi(t, \vec{x}); t_2, t_1] = \int_{t_1}^{t_2} d\tau L[\varphi(\tau, \vec{x}), \dot{\varphi}(\tau, \vec{x})] \quad (a1)$$

Im Gegensatz zur Mechanik besteht in der relativistischen Feldtheorie zwischen t und $\vec{x}$, deren dynamische Rollen ganz verschieden sind, ein enger Zusammenhang wegen der Gleichbehandlung von Raum und Zeit. Das bedeutet, daß S in (a1) von $\vec{x}$ genauso abhängen soll wie von t :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} d\tau \int d^3x \mathcal{L}(\varphi(\tau, \vec{x}), \partial_\mu \varphi(\tau, \vec{x})) \quad (a2)$$

Damit hat das Funktional L eine spezielle lokale Form, in der die verschiedenen Freiheitsgrade $\varphi(\vec{x})$ nur durch die räumlichen Ableitungen $\partial_i \varphi$ verkoppelt sind. Die Differenzierbarkeitsstruktur des Index $\vec{x}$ ist also wesentlich für die resultierende Dynamik. Im Folgenden nehmen wir als Lagrangedichte $\mathcal{L}$ für ein reelles Skalarfeld ($c=1$):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - \mathcal{U}(\varphi) \quad (a3)$$

und damit:

$$L = \int d^3x \left(\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi)^2 - u(\varphi) \right) \quad (\text{a4})$$

Die Struktur ist die gleiche wie in der nichtrelativistischen Mechanik:

Die kinetische Energie jedes Freiheitsgrades geht mit der Dichte $\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2$ ein und die potentielle Energie des gekoppelten Systems ist

$$V[\varphi(\vec{x})] = \int d^3x \left(\frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi)^2 + u(\varphi) \right) \quad (\text{a5})$$

Potentielle Energie steckt also in der räumlichen Variation des Feldes und in der absoluten Auslenkung durch die Funktion $u(\varphi)$. Für die freie Theorie ist $u(\varphi) = \frac{1}{2} k^2 \varphi^2$, d.h. es liegt ein System von gekoppelten harmonischen Oszillatoren vor. Wenn wir jetzt noch entsprechend dem Übertrag von Summation zu Integration über Freiheitsgrade ersetzen

$$\frac{\partial L}{\partial q_s} \rightarrow \frac{\delta L}{\delta \varphi(\vec{x})},$$

dann können wir mit dem Feldsystem zunächst völlig analog zur Mechanik verfahren. Wir definieren als kanonischen Impuls:

$$\pi(\vec{x}) = \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}(\vec{x})} = \dot{\varphi}(\vec{x}) \quad (\text{a6})$$

Das Hamiltonfunktional lautet damit:

$$H[\varphi(\vec{x})] = \int d^3x \pi(\vec{x}) \dot{\varphi}(\vec{x}) - L[\varphi(\vec{x})] = \int d^3x \frac{1}{2} \pi^2 + V[\varphi(\vec{x})] \quad (\text{a7})$$

Die Phasenraumpunkte haben als Koordinaten Paare von Funktionen $(\varphi(\vec{x}), \pi(\vec{x}))$ und aus zwei Funktionalen auf dem Phasenraum $f[\varphi, \pi]$ und $g[\varphi, \pi]$ bilden wir das Lie-Produkt:

$$[f, g]_{\text{P.K.}} = \int d^3x \left(\frac{\delta f}{\delta \varphi(\vec{x})} \frac{\delta g}{\delta \pi(\vec{x})} - \frac{\delta f}{\delta \pi(\vec{x})} \frac{\delta g}{\delta \varphi(\vec{x})} \right) \quad (\text{a8})$$

Im Vergleich mit (IIe5) besitzt die Zweiform Θ jetzt ein zweifaches

$\mathbb{R}^3$ -Kontinuum von Komponenten und $\varphi(\vec{x}), \pi(\vec{x})$ sind kanonische Koordinaten. Die Lie-Produkte der Koordinaten selbst lauten:

$$\begin{aligned} [\varphi(\vec{x}), \varphi(\vec{y})]_{\text{p.k.}} &= 0 = [\pi(\vec{x}), \pi(\vec{y})]_{\text{p.k.}} \\ [\varphi(\vec{x}), \pi(\vec{y})]_{\text{p.k.}} &= \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (\text{a9})$$

und die Produktbildung mit H erzeugt die Zeitentwicklung eines beliebigen Observablenfunktionals $f[\varphi, \pi; t]$ im Heisenbergbild:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H]_{\text{p.k.}} \quad (\text{a10})$$

Zum Prozeß der Quantisierung stellen wir uns wieder parallel zum klassischen System ein abstraktes Quantensystem vor - Hilbertraum, Unterraumsystem, Observable als hermitesche Operatoren bzw. gewichtete Summen von Projektoren, Lie-Produkt-Struktur der Kommutatoren mit $\frac{i}{\hbar}$ - und verketteten diese Systeme durch ihre fundamentalen Lie-Produkte wie in (IIe11):

$$\begin{aligned} -\frac{i}{\hbar} [\hat{\varphi}(\vec{x}), \hat{\varphi}(\vec{y})] &= 0 = -\frac{i}{\hbar} [\hat{\pi}(\vec{x}), \hat{\pi}(\vec{y})] \\ -\frac{i}{\hbar} [\hat{\varphi}(\vec{x}), \hat{\pi}(\vec{y})] &= \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (\text{a11})$$

wobei $\hat{\varphi}(\vec{x}), \hat{\pi}(\vec{x})$ als zu den klassischen Koordinaten korrespondierende Quantenobservable postuliert werden. Die Algebra wird realisiert durch die Schrödingerdarstellung der Feldtheorie; man denkt sich die Zustandsvektoren als komplexe Funktionen auf dem Konfigurationsraum (verallgemeinerter Ortsraum) bzw. als Funktionale von dessen Koordinaten $\varphi(\vec{x})$: $\psi[\varphi(\vec{x})]$.
Darauf wirken $\hat{\varphi}(\vec{x}), \hat{\pi}(\vec{x})$:

$$\begin{aligned} (\hat{\varphi}(\vec{y})\psi)[\varphi(\vec{x})] &= \varphi(\vec{y}) \psi[\varphi(\vec{x})] \\ (\hat{\pi}(\vec{z})\psi)[\varphi(\vec{x})] &= \frac{\hbar}{i} \frac{\delta \psi}{\delta \varphi(\vec{z})} \end{aligned} \quad (\text{a12})$$

und (a11) ist nach den Regeln für Funktionalableitung erfüllt. Denkt man weiter über diesen Zustandsraum nach, dann stößt man auf die typischen Probleme der Feldtheorie; um etwa die Funktionale zu einem Hilbertraum zu machen, müßte man rigoros die Funktionalintegration und damit Quadratintegrierbarkeit definieren, z.B. durch Abschneiden des Kontinuums von

Freiheitsgraden zu einem endlichen System und Grenzübergang. In der normalen Störungstheorie vermeidet man diese Schwierigkeiten, indem man entwickelt nach Fockraumzuständen der freien Theorie und annimmt, daß diese ausreichen. Wir wollen sie hier im Schrödingerbild konstruieren. Der freie Hamilton-Operator lautet:

$$(a7), (a12) \rightarrow \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2} \int d^3x \frac{\delta^2}{\delta\varphi(\vec{x}) \delta\varphi(\vec{x})} + V[\varphi(x)] \quad (a13)$$

$$V[\varphi(\vec{x})] = \frac{1}{2} \int d^3x [(\vec{\nabla}\varphi)^2 + \kappa \varphi^2]$$

Wenn wir im Konfigurationsraum von den Koordinaten $\varphi(\vec{x})$ durch reelle (orthogonale) Fouriertransformation zu Koordinaten $F(\vec{k})$ übergehen

$$\varphi(\vec{x}) = \int d^3k (2\pi)^{-3/2} (\cos \vec{k} \cdot \vec{x} + \sin \vec{k} \cdot \vec{x}) F(\vec{k}) \quad (a14)$$

dann entkoppelt und faktorisiert $\hat{H}$ in den neuen Koordinaten:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= -\frac{\hbar^2}{2} \int d^3k \frac{\delta^2}{\delta F(\vec{k}) \delta F(\vec{k})} + \frac{1}{2} \int d^3k (\vec{k}^2 + \kappa^2) F(\vec{k})^2 = \\ &= E_0 + \int d^3k \hbar \omega(\vec{k}) \hat{A}^\dagger(\vec{k}) \hat{A}(\vec{k}) \end{aligned} \quad (a15)$$

mit $\omega(\vec{k}) = +\sqrt{\vec{k}^2 + \kappa^2}$ und

$$\begin{aligned} \hat{A}(\vec{k}) &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega(\vec{k})}} \frac{\delta}{\delta F(\vec{k})} + \sqrt{\frac{\omega(\vec{k})}{2\hbar}} F(\vec{k}) \\ \hat{A}^\dagger(\vec{k}) &= -\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega(\vec{k})}} \frac{\delta}{\delta F(\vec{k})} + \sqrt{\frac{\omega(\vec{k})}{2\hbar}} F(\vec{k}) \end{aligned} \quad (a16)$$

E_0 ist eine unendliche Konstante, die Summe der Nullpunktsenergien aller Freiheitsgrade. $\hat{A}$ und $\hat{A}^\dagger$ erfüllen die Vernichter- und Erzeugeralgebra:

$$\begin{aligned} [\hat{A}(\vec{k}), \hat{A}(\vec{l})] &= 0 = [\hat{A}^\dagger(\vec{k}), \hat{A}^\dagger(\vec{l})] \\ [\hat{A}(\vec{k}), \hat{A}^\dagger(\vec{l})] &= \delta^3(\vec{k} - \vec{l}) \end{aligned} \quad (a17)$$

Aus der Bedingung $H(\vec{k}) \psi_0[F(\vec{k})]$ finden wir das Fock-Vakuumfunktional explizit:

$$\psi_0[F(\vec{k})] = N e^{\frac{-1}{2\hbar} \int d^3k \omega(\vec{k}) F(\vec{k})^2} \quad (a18)$$

Die Fockraumzustände entstehen durch Anwendung von $H^\dagger$ auf ψ_0 ; alle Skalarprodukte können auf die vorausgesetzte Normierung von ψ_0 zurückgeführt werden. Das Spektrum von H auf diesen Zuständen ist nach Subtraktion von E_0 das freier relativistischer Teilchen mit Masse $\hbar k$ ($\dim k = \text{Länge}^{-1}$, $c = 1$).

Wir haben hier die kanonische Feldquantisierung in starker Analogie zu endlichen mechanischen Systemen behandelt; dabei mußten wir den Übergang zu kontinuierlichen Freiheitsgraden recht naiv behandeln, da ja die Ersetzung von endlichen Summen durch Integrale wegen Divergenzen nicht immer sinnvoll ist. Außerdem haben wir zu Gunsten der Analogie die explizite Kovarianz aufgegeben und die Dynamik durch die Zeit $t=x^0$ parametrisiert. Um eine mehr kovariante Form zu bewahren, müßte man den Minkowski-Raum mit allgemeinen raumartigen Flächen und einem Parameter, der diese unterscheidet, ausfüllen. Die Analogie zeigt aber, daß sich bei der Quantisierung und speziell der Einführung der komplexen Zahlen eigentlich nichts ändert; der Unterschied zur Mechanik liegt in der Art des klassischen Konfigurationsraumes.

b) Feldquantisierung als zweite Quantelung [20]

Statt einem Feld als klassischem mechanischen System nach den Regeln der kanonischen Quantisierung ein Quantensystem zuzuordnen kann man die gleiche Theorie auch erreichen, indem man von der Quantenmechanik mit endlich vielen Freiheitsgraden übergeht zur Quantenmechanik vieler identischer solcher Systeme. Dazu konstruieren wir zunächst den n -Teilchen Hilbertraum durch n -fache Tensorproduktbildung des ursprünglichen komplexen Hilbertraumes H^1 :

$$H^n = H^1 \otimes \dots \otimes H^1 \quad (b1)$$

und ordnen einem Tupel von n Zuständen

$|1\rangle, \dots, |n\rangle \in H^1$ einen Vektor im Produktraum zu:

$$|\psi\rangle = |1\rangle \otimes \dots \otimes |n\rangle \in H^n \quad (b2)$$

Diese Zuordnung ist konsistent mit der projektiven Geometrie: $|k\rangle$ steht als willkürlich ausgewählter Repräsentant für seinen eindimensionalen Unterraum; wählt man andere Vertreter:

$$(|1\rangle e^{i\alpha_1}) \otimes \dots \otimes (|n\rangle e^{i\alpha_n}) = |\psi\rangle e^{i(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)},$$

dann ändert sich auch beim Produktvektor nur die Phase. Die Zuordnung für die Unterräume ist also invariant; diese Konstruktion macht wesentlich Gebrauch von der Vertauschbarkeit der komplexen Zahlen und ist daher auf kommutative Zahlensysteme beschränkt. Die Vektoren in H^n , die alle durch Produkte der Form (b2) aufgespannt werden, tragen "automatisch" eine i.a. reduzible unitäre Darstellung der symmetrischen Gruppe S_n :

$$S_n \ni \pi \rightarrow U_\pi: U_\pi |1\rangle \otimes \dots \otimes |n\rangle = |\pi(1)\rangle \otimes \dots \otimes |\pi(n)\rangle \quad (b3)$$

Die physikalische Vorstellung der Ununterscheidbarkeit der einzelnen Komponenten-Systeme bedeutet, daß alle Observablen mit allen U_π vertauschen. Damit ist die Darstellung der Quantenmechanik i.a. reduzibel, d.h. durch Messung von Observablen oder Propositionen kann kein Zustand eindeutig bestimmt werden. Der Ausweg der Natur besteht bekanntlich darin, den Zustandsraum auf die trivialen eindimensionalen Komponenten in der Ausreduktion der S_n -Darstellung zu beschränken, das sind für jedes n die total symmetrischen Vektoren aus H_+^n oder die antisymmetrischen aus H_-^n . Wir betrachten hier den symmetrischen Fall, und die Zuordnung (b2) wird ersetzt:

$$\begin{aligned} |1\rangle, \dots, |n\rangle &\rightarrow |\psi\rangle^+ = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\pi \in S_n} U_\pi |1\rangle \otimes \dots \otimes |n\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\pi \in S_n} |\pi(1)\rangle \otimes \dots \otimes |\pi(n)\rangle \in H_+^n \end{aligned} \quad (b4)$$

Die Normierung ist so gewählt, daß für orthogonale normierte $|k\rangle$ auch $|\psi\rangle$ normiert ist. Der Bose-Fock-Raum ist die direkte Summe aller H_+^n :

$$F_+ = \sum_{n=0}^{\infty} H_+^n \quad (b5)$$

wobei H_+^0 als ein eindimensionaler Raum hinzugefügt ist, der physikalisch dem Nichtvorhandensein von Systemen oder Teilchen der betrachteten Art entspricht.

Um den Raum F_+ rekursiv aus H_+^0 aufzubauen, definieren wir einen Erzeugungsoperator; er ist linearer Operator in F_+ und gleichzeitig lineares Funktional auf dem Einteilchen-Hilbert-Raum:

$$\begin{aligned} A^\dagger &= A^\dagger(|\psi\rangle) \quad |\psi\rangle \in H^1 \\ A^\dagger(|\psi\rangle) \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\pi \in S_n} |\pi(1)\rangle \otimes \dots \otimes |\pi(n)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{(n+1)!}} \sum_{\pi \in S_{n+1}} |\pi(1)\rangle \otimes \dots \otimes |\pi(n+1)\rangle \quad (b6) \\ \text{mit } |n+1\rangle &= |\psi\rangle \end{aligned}$$

$A^\dagger$ fügt also dem symmetrischen Produkt in H_+^n $|\psi\rangle$ hinzu zu einem Produkt in H_+^{n+1} ; seine zweifache Linearität beruht auf der Linearität des Tensorprodukts von komplexen Räumen. Man stellt fest, daß man somit $|\psi\rangle$ aus (b4) auch schreiben kann:

$$|\psi\rangle = A^\dagger(|\psi\rangle) \dots A^\dagger(|\psi\rangle) |0\rangle \quad (b7)$$

mit $|0\rangle \in H_+^0$, $\langle 0|0\rangle = 1$

Die verschiedenen $A^\dagger(|\psi\rangle)$ kommutieren wegen der symmetrisierten Form von F^+ ; bei Antisymmetrisierung (Fermi-Fall) antivertauschen sie. Indem wir den zu $A^\dagger$ adjungierten Operator in F^+ ausrechnen, finden wir den Vernichter $A(|\psi\rangle)$ der ein antilineares Funktional auf H^1 ist:

$$A(|\psi\rangle\lambda) = \lambda^* A(|\psi\rangle), \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

und auf F^+ wirkt:

$$\begin{aligned} A(|\psi\rangle) \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\pi \in S_n} |\pi(1)\rangle \otimes \dots \otimes |\pi(n)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{(n-1)!}} \sum_{\pi \in S_n} \langle \psi | \pi(n) \rangle |\pi(1)\rangle \otimes \dots \otimes |\pi(n-1)\rangle \quad (b8) \\ A(|\psi\rangle) |0\rangle &:= 0 \end{aligned}$$

A bewirkt das Gegenteil von $A^\dagger$ und entfernt einen Faktor aus dem Produkt. A und $A^\dagger$ erfüllen miteinander die kanonischen Vertauschungsrelationen:

$$[A(|\psi\rangle), A(|\psi\rangle)] = 0 = [A^\dagger(|\psi\rangle), A^\dagger(|\psi\rangle)]$$

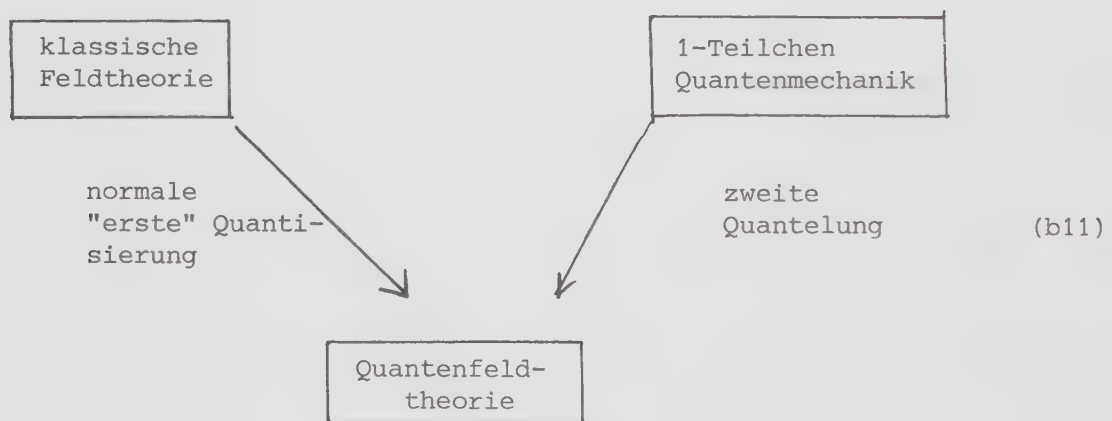
$$[A(|\psi\rangle), A^\dagger(|\psi\rangle)] = \langle \psi | \psi \rangle \quad (b9)$$

Wegen der Linearität von $A^\dagger$ genügt es, $A^\dagger$ für eine Basis im Einteilchenraum H^1 zu kennen. Stellen wir uns als Grundsystem ein spinloses Teilchen, dessen Zustandsraum durch Impulseigenzustände $|\vec{k}\rangle$ aufgespannt werde, vor:

$$A^\dagger(|\vec{k}\rangle) = A^\dagger(\vec{k}), \quad [A(\vec{k}), A^\dagger(\vec{l})] = \langle \vec{k} | \vec{l} \rangle = \delta^3(\vec{k} - \vec{l}) \quad (b10)$$

Diese Relation stimmt mit (a17) überein, wenn man $|0\rangle$ mit ψ_0 identifiziert. (a18)

Wir sind also durch zwei eigentlich recht unterschiedliche Konstruktionen zu dem gleichen Fockraum gekommen:



In beiden Fällen ging die komplexe Struktur der Hilberträume wesentlich ein: in der gewöhnlichen Quantisierung, indem man das $\mathfrak{L}$ braucht für das Lie-Produkt auf der Menge der Observablen, in der Zweit-Quantisierung einmal durch die ursprüngliche Einteilchentheorie und außerdem in Form von Eigenschaften des Tensorprodukts wie Linearität oder Symmetrie, die an der Kommutativität des Zahlensystems liegen.

c) Mehrkomponentige Felder

Wir gebrauchen nun wieder die Sprache der "erstquantisierten" Felder.

Es ist keine Schwierigkeit das Kontinuum von Freiheitsgraden noch einmal diskret zu erweitern; (kanonische) Koordinaten im Phasenraum sind dann $2N$ -Tupel von Raumfunktionen: $\varphi_1(\vec{x}), \pi_1(\vec{x}), \dots, \varphi_N(\vec{x}), \pi_N(\vec{x})$. Die Lagrange-dichte (a3) enthält die Ableitungsterme additiv (doppelte Indizes $k, l \dots$ summiert):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_k \partial^\mu \varphi_k - U(\varphi_k) \quad (c1)$$

und wir wollen annehmen, daß auch U die $O(N)$ Symmetrie des ersten Terms besitzt: $U = U(\varphi_k \varphi_k)$. Alle Ausdrücke in Abschnitt a) sind sinngemäß um den diskreten Index zu erweitern, z.B. wird aus der fundamentalen Poisson-klammer (a9):

$$[\varphi_k(\vec{x}), \pi_l(\vec{y})]_{P.K.} = \delta_{kl} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (c2)$$

Die $O(N)$ -Symmetrie besteht aus Punkttransformationen (φ_k und π_k nicht gemischt), deren $SO(N)$ Untergruppe aus infinitesimalen Transformationen aufgebaut wird:

$$\begin{aligned} \varphi_k(\vec{x}) &\rightarrow \varphi_k(\vec{x}) + \varepsilon_{kl} \varphi_l(\vec{x}) \\ \pi_k(\vec{x}) &\rightarrow \pi_k(\vec{x}) + \varepsilon_{kl} \pi_l(\vec{x}) \end{aligned} \quad \text{mit } \binom{N}{2} \text{ reellen Parametern } \varepsilon_{kl} = -\varepsilon_{lk} \quad (c3)$$

Die erzeugenden Funktionale dazu lauten:

$$\begin{aligned} Q_{mn}[\varphi_k, \pi_k] &= \int d^3x \pi_m(\vec{x}) \varphi_n(\vec{x}) \\ \delta \varphi_k &= \varepsilon_{kl} \varphi_l = [\varphi_k, \varepsilon_{mn} Q_{mn}]_{P.K.} \\ \delta \pi_k &= \varepsilon_{kl} \pi_l = [\pi_k, \varepsilon_{mn} Q_{mn}]_{P.K.} \end{aligned} \quad (c4)$$

Um die zweite Komponente der $O(N)$ zu erreichen benötigen wir eine Spiegelung C , z.B.:

$$C: \left. \begin{array}{ll} \varphi_1 \rightarrow -\varphi_1 & \varphi_k \rightarrow \varphi_k \\ \pi_1 \rightarrow -\pi_1 & \pi_k \rightarrow \pi_k \end{array} \right\} \text{ f. } k \neq 1 \quad (c5)$$

Um sie durch das Lie-Produkt zu erzeugen, betrachten wir hilfsweise das erzeugende Funktional :

$$\begin{aligned} K &= \int d^3x \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} \pi_1^2(\vec{x}) + k \varphi_1^2(\vec{x}) \right) \\ \delta \varphi_1(\vec{x}) &= [\varphi_1(\vec{x}), \varepsilon K]_{\text{p.k.}} = \frac{\varepsilon}{k} \pi_1(\vec{x}) \\ \delta \pi_1(\vec{x}) &= [\pi_1(\vec{x}), \varepsilon K]_{\text{p.k.}} = -\varepsilon k \varphi_1(\vec{x}) \end{aligned} \quad (c6)$$

Der Generator K dreht also in der $(k\varphi_1, \pi_1)$ Ebene um einen Winkel ε ; die Konstante k ($\dim = \text{Länge}^{-1}$) wird hier aus Dimensionsgründen eingeführt. Diese Drehung ist für allgemeine Winkel eine Symmetrie nur der freien Theorie mit k als Massenparameter (d.h. k wird die Masse). Für den endlichen Winkel π entspricht sie aber (c5), und wir können die Spiegelung C also erzeugen:

$$\begin{aligned} C: \quad \varphi_k &\rightarrow \varphi_k + \pi [\varphi_k, K]_{\text{p.k.}} + \frac{\pi^2}{2!} [[\varphi_k, K]_{\text{p.k.}}, K]_{\text{p.k.}} + \dots \\ \pi_k &\rightarrow \pi_k + \pi [\pi_k, K]_{\text{p.k.}} + \frac{\pi^2}{2!} [[\pi_k, K]_{\text{p.k.}}, K]_{\text{p.k.}} + \dots \end{aligned} \quad (c7)$$

Wir spezialisieren jetzt zur Betrachtung der quantisierten Theorie auf zwei Feldkomponenten und die Gruppe $O(2)$, deren Einskomponente $SO(2) \cong U(1)$ wir mit ladungsartigen Größen in Verbindung bringen wollen. Die Gruppe ist abelsch und besitzt nur einen Generator:

$$\varepsilon_{ke} = \varepsilon I_{ke}, \quad I_{ke} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad k, e = 1, 2 \quad (c8)$$

und damit ein erzeugendes Funktional:

$$Q[\varphi_k, \pi_e] = I_{ke} \int d^3x \pi_k(\vec{x}) \varphi_e(\vec{x}) = \int d^3x (\pi_1(\vec{x}) \varphi_2(\vec{x}) - \pi_2(\vec{x}) \varphi_1(\vec{x})) \quad (c9)$$

Bei der Quantisierung gibt es für $\hat{Q}$ keine Operatorordnungsschwierigkeiten, und wir haben speziell in der Schrödinger-Funktionaldarstellung die Wirkung von $\hat{Q}$ auf Wellenfunktionen (bei einer gewissen Phasenwahl, siehe (IIIb)):

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{i}{\hbar} \varepsilon Q(\hat{\pi}_k, \hat{\varphi}_e)\right) \psi[\varphi_1(\vec{x}), \varphi_2(\vec{x})] = \\ & = \left\{1 + \frac{i}{\hbar} \varepsilon \int d^3x \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta \varphi_1(x)} \varphi_2(\vec{x}) - \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta \varphi_2(x)} \varphi_1(\vec{x})\right)\right\} \psi[\varphi_1(\vec{x}), \varphi_2(\vec{x})] \quad (c10) \\ & = \psi[\varphi_1(\vec{x}) + \varepsilon \varphi_2(\vec{x}), \varphi_2(\vec{x}) - \varepsilon \varphi_1(\vec{x})] \end{aligned}$$

Die Anwendung von $\hat{Q}$ erzeugt also eine "Verdrehung" im Argument des Wellenfunktionals; die endliche Form läßt sich an (c10) erkennen:

$$\begin{aligned} (e^{\frac{i}{\hbar} \alpha \hat{Q}} \psi)[\varphi_1, \varphi_2] &= \psi[\cos \alpha \varphi_1 + \sin \alpha \varphi_2, \cos \alpha \varphi_2 - \sin \alpha \varphi_1] \\ &=: (\hat{U}(\alpha) \psi)[\varphi_1, \varphi_2] \quad (c11) \end{aligned}$$

Eine Möglichkeit der Theorie wäre, daß die $O(2)$ Invarianz eine normale Entartung der Theorie widerspiegelt; es könnte dann Messungen und Observable geben, die die Feldkomponenten in einem gewählten "Koordinatensystem" unterscheiden, wie man ja auch in einer durch Drehinvarianz entarteten Theorie durchaus Observable für x und y besitzt. Die Erfahrung zeigt aber, daß $U(1)$ -Symmetrien der Feldtheorie mit Superauswahlregeln wie Ladung, Baryonzahl usw. zusammenhängen. Wir werden dies durch die Art der möglichen Messungen interpretieren.

Observablen für Impuls, Drehimpuls usw., die man durch Noetherkonstruktion aus einer symmetrischen Lagrangedichte wie (c1) gewinnt, sind $O(2)$ -symmetrisch. d.h. vertauschen mit $\hat{U}(\alpha)$ aus (c11). Nehmen wir an, das gilt für alle physikalischen Messungen! Dann sind wir in einer ähnlichen Situation wie im letzten Abschnitt, bei dem n -fachen Tensorprodukt des Einteilchen-Hilbertraumes, wo die Operatoren der Permutationsgruppe U_π mit allen Propositionen vertauschten: unsere Annahme ist eine kontinuierliche Verallgemeinerung der Ununterscheidbarkeit von Teilchen. Wie in der Vielteilchentheorie ist die Darstellung $\hat{U}(\alpha)$ im

Zustandsraum reduzibel. Wählen wir den gleichen Ausweg wie dort: beschränken wir den Zustandsraum auf eine eindimensionale irreduzible Komponente, die im Darstellungsraum der $\hat{U}(\alpha)$ vorhanden ist. Bei der diskreten Permutationsgruppe leisteten dies die Projektoren:

$$P_+ = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} U_\pi \quad \text{bzw.} \quad P_- = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \delta_\pi U_\pi, \quad \text{also}$$

Summen über die Darstellungsoperatoren der ganzen Gruppe mit gewissen Gewichtsfunktionen. Wir behaupten, daß für die $SO(2)$ und ihre Darstellung $\hat{U}(\alpha)$ im komplexen Hilbertraum ein unendlicher Satz $\hat{P}_n$ die eindimensionalen Komponenten herausprojiziert:

$$\hat{P}_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha e^{-in\alpha} \hat{U}(\alpha) \quad (c12)$$

Mit Hilfe der aus (c11) ersichtlichen Eigenschaften:

$$\hat{U}(\alpha) = \hat{U}(\alpha + 2\pi), \quad \hat{U}(0) = 1$$

$$\hat{U}(\alpha) \hat{U}(\beta) = \hat{U}(\alpha + \beta)$$

$$\hat{U}^\dagger(\alpha) = \hat{U}^{-1}(\alpha) = \hat{U}(-\alpha)$$

zeigt man, daß $\hat{P}_n$ kommutierende orthogonale Projektoren sind: $\hat{P}_n^\dagger = \hat{P}_n$,
 $\hat{P}_n \hat{P}_m = \delta_{nm} \hat{P}_n$. Da alle irreduziblen Darstellungen der $SO(2)$ eindimensional sind, sind $\hat{P}_n$ sogar vollständig:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \hat{P}_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \sum_n e^{-in\alpha} \hat{U}(\alpha) = \hat{U}(0) = 1 \quad (c13)$$

Auf dem Sektor $\hat{P}_n$ hat der Generator $\frac{1}{\hbar} \hat{Q}$ den Eigenwert n (also ist die Gesamtladung n):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hbar} \hat{Q} \hat{P}_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \frac{\hat{Q}}{\hbar} e^{-in\alpha} e^{\frac{i}{\hbar} \alpha \hat{Q}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha e^{-in\alpha} \frac{1}{i} \frac{d}{d\alpha} e^{\frac{i}{\hbar} \alpha \hat{Q}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \left(-\frac{1}{i} \frac{d}{d\alpha} e^{-in\alpha} \right) e^{\frac{i}{\hbar} \alpha \hat{Q}} = n \hat{P}_n \end{aligned} \quad (c14)$$

Die Schrödingerfunktionale kann man vorübergehend

$$(\hat{U}(\alpha)\psi)[\varphi_1(\vec{x}), \varphi_2(\vec{x})] = \psi'[\varphi_1(\vec{x}), \varphi_2(\vec{x}); \alpha]$$

als abhängig von einer zusätzlichen periodischen Variablen α ansehen $\hat{P}_n$ projiziert aus ψ' bezüglich dieser Abhängigkeit bei festgehaltenen Funktionen φ_1, φ_2 die n-te Fourierkomponente heraus. Für ψ aus dem Bildbereich von $\hat{P}_n$, $\hat{P}_n\psi = \psi$, also für alle physikalischen Zustände, wenn die Komponente n als Zustandsraum gewählt ist, gilt dann in Analogie zur Bose-Symmetrie oder Fermi Antisymmetrie der Wellenfunktionen:

$$\psi[\cos\alpha\varphi_1 + \sin\alpha\varphi_2, \cos\alpha\varphi_2 - \sin\alpha\varphi_1] = e^{in\alpha} \psi[\varphi_1, \varphi_2] \quad (c15)$$

d.h. die $U(1)$ im klassischen Konfigurationsraum - Drehung der Koordinaten φ_1, φ_2 - ist mit der Quantenphase im Hilbertraum fest verkoppelt; die Ladung n entspricht dabei der topologischen Windungszahl der Abbildungen von der einen $U(1)$ auf die andere. Der Hilbertraum, in dem alle vorkommenden Operatoren zu sehen sind, besteht also aus Funktionalen, die (c15) erfüllen (sie bilden einen Vektorraum, d.h. (c15) erhält sich unter Addition und $\mathbb{C}$ -Skalarmultiplikation). Der zu ψ gehörige Dichteoperator $|\psi\rangle\langle\psi|$ ist $U(1)$ -invariant, wie es ja auch erforderlich ist, denn er stellt ja gleichzeitig eine Proposition dar. Interessant ist es auch, die Situation der klassischen Theorie zu betrachten; auch dort führt die Annahme, daß alle meßbaren Größen $SO(2)$ -invariant vom Feld abhängen, dazu, daß man den Phasenraumpunkt (klassischer reiner Zustand) nur bis auf Rotation bestimmen kann. Einer Superauswahlregel würde es entsprechen, als Zustände nur invariante normierte Dichtefunktionen zuzulassen; eine Ladung gibt es aber nicht. Sie ist ein quantenmechanisches Phänomen, das mit der projektiven Struktur, der freien Phase des Zustandsvektors, zusammenhängt; genauer gesagt ist ihr Ursprung, daß die eindimensionalen Darstellungen der $SO(2)$ im Komplexen eine Serie der Mächtigkeit der ganzen Zahlen bilden.

Die Wirkung der Spiegelung C (c7) kann für das quantisierte Lie-Produkt im Gegensatz zum klassischen zu einer unitären Ähnlichkeitstransformation aufsummiert werden:

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_k &\rightarrow \hat{\psi}_k - \frac{i\pi}{\hbar} [\hat{\psi}_k, \hat{K}] + \frac{1}{2!} \left(\frac{-i\pi}{\hbar}\right)^2 [[\hat{\psi}_k, \hat{K}], \hat{K}] + \dots = \\ &= e^{\frac{i\pi}{\hbar} \hat{K}} \hat{\psi}_k e^{-\frac{i\pi}{\hbar} \hat{K}} =: \hat{C} \psi \hat{C}^\dagger\end{aligned}\quad (c16)$$

und analog für $\hat{\pi}_e$. Es folgt für den $O(2)$ Fall:

$$\hat{C} \hat{Q} \hat{C}^\dagger = -\hat{Q} \quad \text{und} \quad \hat{C} \hat{P}_n \hat{C}^\dagger = \hat{P}_{-n}$$

Der unitäre Operator $\hat{C}$ entspricht also der Ladungsumkehr; er drückt die physikalische Äquivalenz der Wahl von n oder $-n$ für den physikalischen Zustandsraum aus, wenn die Observablen $SO(2)$ invariant sind. $\hat{Q}$ selbst, das nicht mit $\hat{C}$ vertauscht, ist übrigens als mögliche Messung zugelassen. Würde man $O(2)$ - und nicht $SO(2)$ -Invarianz für alle Observablen verlangen, so würde die gleiche Argumentation wie oben dazu führen, den Zustandsraum auf die eindimensionalen irreduziblen Komponenten der $O(2)$ -Darstellung $\{\hat{C}, U(x)\}$ zu beschränken; dies wäre nur die triviale Darstellung, und es gäbe keinen Ladungsfreiheitsgrad.

Um wieder den Fockraum durch Erzeuger aus einem Vakuum Funktional aufzubauen, betrachten wir die freie Theorie mit

$$U(\psi_k) = \frac{1}{2} k^2 \psi_k \psi_k$$

Der Hamiltonoperator faktorisiert wie in (a15) in zwei Terme:

$$\hat{H} = E_0 + \int d^3k \hbar \omega(\vec{k}) \left(A_1^\dagger(\vec{k}) A_1(\vec{k}) + A_2^\dagger(\vec{k}) A_2(\vec{k}) \right)$$

mit Erzeugern und Vernichtern $A_i^\dagger, A_i$ für die zwei Kontinua von reellen Freiheitsgraden $\psi_i(\vec{x})$ bzw. $F_i(\vec{k})$. Das Grundzustandsfunktional

$$\psi_0 = e^{-\frac{1}{2\hbar} \int d^3k \omega(\vec{k}) (F_1(\vec{k})^2 + F_2(\vec{k})^2)} \quad (c17)$$

liegt im Sektor $n=0$. Wenden wir nun z.B. $A_1^\dagger$ auf ψ_0 an, dann gelangen wir zu einem Funktional, das (c15) nicht erfüllt, also nach dem bisher Gesagten physikalisch nicht zulässig ist genau wie eine nicht symmetrische oder antisymmetrische Vielteilchen-Wellenfunktion. Definierte Ladungseigenschaften haben die notwendig mit i gebildeten Kombinationen:

$$A_\pm^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_1^\dagger \pm i A_2^\dagger) \quad A_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_1 \mp i A_2), \quad (c18)$$

die ebenfalls die Erzeuger- und Vernichteralgebra erfüllen. Für sie gilt:

$$\begin{aligned}\hat{P}_{n+1} A_+^\dagger \hat{P}_n &= A_+^\dagger \hat{P}_n \\ \hat{P}_{n-1} A_-^\dagger \hat{P}_n &= A_-^\dagger \hat{P}_n\end{aligned}\quad (c19)$$

d.h. $A_\pm^\dagger$ führt von der n -Komponente zur $(n \pm 1)$ -Komponente, erzeugt positive (negative) Ladung. Der physikalische Zustandsraum der Ladung n besteht also als Fockraum aus Linearkombinationen aller Vektoren der Form

$$A_+^\dagger(\vec{k}_1) \dots A_+^\dagger(\vec{k}_{N_+}) A_-^\dagger(\vec{l}_1) \dots A_-^\dagger(\vec{l}_{N_-}) \psi_0 \quad (c20)$$

mit $N_+ - N_- = n$, d.h. n Ladungen und Paaren.

d) Eichinvarianz

Wir haben ausgiebig die Theorie des $O(2)$ invarianten zweikomponentigen Skalarfeldes und den Zusammenhang der $SO(2)$ mit Superauswahlladungen besprochen. Wir können wieder - wie schon in I und III - durch Einführung eines Eichpotentials A_μ die Invarianz lokal machen. Im Gegensatz zur Einteilchentheorie in III soll A_μ aber nicht den Status eines äußeren Feldes erhalten, sondern zu den Freiheitsgraden selbst gehören. Die Lagrangedichte lautet dann:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} D_\mu \psi_k D^\mu \psi_k - U(\psi_k \psi_k) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (d1)$$

mit $D_\mu \psi_k = (\delta_{ke} \partial_\mu - e I_{ke} A_\mu) \psi_e$ $k, e = 1, 2$
 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $I_{ke} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

und sie ist invariant unter der Eichtransformation:

$$\begin{aligned}\psi_k &\rightarrow (e^{i\alpha(t, \vec{x})})_{ke} \psi_e = \tilde{\psi}_k \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha = \tilde{A}_\mu\end{aligned}\quad (d2)$$

Die "Phasentransformation" des zweikomponentigen ψ_k mit der reellen Matrix $e^{i\alpha}$, ($I^2 = -1$) ist eine Transformation im klassischen Konfigurationsraum und hat zunächst mit Hilbertraumphasen nichts zu tun; um dies klar zu

unterscheiden, führen wir keine klassischen komplexen Felder ein. Zur Verdeutlichung des in der Feldtheorie veränderten Status der Eichinvarianz skizzieren wir in Anhang D, wie man in der Feldtheorie eine Eichinvarianz nach Art der Einteilchentheorie einführen würde.

Man sieht an der klassischen Theorie bereits, daß die mit $\mathcal{L}$ gebildete Wirkung nicht ohne weiteres eine Dynamik definiert. Betrachten wir dazu Trajektorien der Felder in der Zeit zwischen t_1 und t_2 mit gewissen festgehaltenen Anfangs- und Endwerten:

$$\varphi_k(\vec{x}, t), A_\mu(\vec{x}, t) \quad , \text{ feste Funktionen von } \vec{x} \quad \text{für } t=t_1, t_2$$

Zu jeder Trajektorie gehört eine Wirkung:

$$S[\varphi_k, A_\mu; t_2, t_1] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \mathcal{L} \quad (d3)$$

Die Extremalbedingung $\delta S = 0$ kann nun wegen der Eichinvarianz keine Trajektorie eindeutig bestimmen, wie man leicht sieht: zu jeder Trajektorie gibt es unendlich viele, die gemäß (d2) transformiert sind mit einer Eichfunktion $\alpha(t, \vec{x}) = 0 = \partial_\mu \alpha(t, \vec{x})$ für $t=t_1, t_2$. Sie haben die gleiche Wirkung und erfüllen die Anfangsbedingungen. Folglich kann das Variationsprinzip nicht in üblicher Weise eine Bahn im Konfigurationsraum bestimmen. Das besondere Problem stammt daher, daß die Transformation auch von dem Parameter, der die dynamische Entwicklung beschreibt - bei uns t , da wir als System raumartiger Flächen $t = \text{const.}$ Flächen haben - abhängt. Dadurch war es möglich α so zu wählen, daß die Transformation nichttrivial ist und dennoch für t_1 und t_2 in die Identität übergeht. In gewöhnlichen Theorien - etwa bei Drehinvarianz - tritt das Problem nicht auf; die Wirkung ist zwar invariant, aber durch das Vorlegen von Anfangswerten ist die Orientierung bestimmt. In III benutzten wir auch zeitabhängige Transformationen, doch transformierte sich das äußere Feld mit. Hatte es einmal feste numerische Werte, dann war die Invarianz im engeren Sinne gebrochen. Im vorliegenden Fall läßt die Theorie mit ihren dynamischen Variablen allein zeitabhängige Transformationen zu, die zunächst keine Dynamik im normalen Sinn ermöglichen.

Der Ausweg aus diesen Schwierigkeiten besteht bekanntlich [21] in der Wahl einer Eichung, einer Nebenbedingung, die die Eichinvarianz oder zumindest den zeitabhängigen Teil zerstört. Das bedeutet, daß man nicht mehr die einzelnen Trajektorien durch den Raum der Feldfunktionen als den physikalischen Prozeß ansieht, sondern jeweils die ganze Äquivalenzklasse derer, die durch Eichtransformationen auseinander hervorgehen. Um mit Äquivalenzklassen rechnen zu können, geht man den in der Mathematik üblichen Weg: man bestimmt aus jeder Klasse einen Vertreter - das leistet genau die Eichbedingung - und rechnet mit diesen; dabei muß gewährleistet sein, daß physikalische Ergebnisse, die ja nur von der Dynamik der Klassen abhängen sollen, nicht von den Details der Auswahl (Eichbedingung) beeinflußt werden. Das zu beweisen, vor allem in der quantisierten Theorie, ist schwierig und soll hier nicht Gegenstand sein; vielmehr wollen wir mit einer bestimmten Eichung feststellen, wie sich die $U(1)$ -Ladung in der Eichtheorie verhält.

Durch eine Transformation (d2) kann man stets erreichen, daß $\tilde{A}_0 = 0$. Die nicht kovariante Eichbedingung ist gerade unserer Parametrisierung der Dynamik angepaßt. Schöpft man allgemeiner den Minkowski-Raum durch raumartige dreidimensionale Flächen $\Sigma(\tau)$ aus, dann lautet die Eichbedingung

$n^\mu \tilde{A}_\mu = 0$, wobei n^μ die Flächennormale ist. Für unsere t -Flächen, hat n^μ überall die Komponenten $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Für den von $\tilde{A}_\mu$ gegebenen nicht-integrablen Phasenfaktor bedeutet die Eichbedingung, daß sich Phasen, die in zeitartiger Richtung senkrecht zu den Flächen $\Sigma(\tau)$ parallelverschoben werden, numerisch nicht ändern; man kann dies deuten als geeignete Wahl von Basen in den lokal angehefteten $\mathbb{R}^2$, auf die sich die Komponenten beziehen. Mit der Nebenbedingung $\tilde{A}_0 = 0$ haben wir immer noch die Freiheit zeitunabhängige Transformationen $\alpha = \alpha(\vec{x})$ durchzuführen. Dabei tritt aber kein dynamisches Problem mehr auf, da dies eine Transformation im gewöhnlichen Sinn ist; es wird zwar noch immer mit beliebigen Parameterfunktionen transformiert, doch diese hängen nur vom Index, der die Freiheitsgrade abzählt, ab.

Wenn wir nun wieder A, φ für $\tilde{A}, \tilde{\varphi}$ schreiben, dann lautet die Lagrange-dichte für die gewählten Repräsentanten der Eichklassen:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\varphi}_\kappa^2 + \frac{1}{2} \dot{\vec{A}}^2 - \frac{1}{2} (\vec{D}\varphi_\kappa)(\vec{D}\varphi_\kappa) - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 \quad (d4)$$

mit $A^\mu = (0, \vec{A}) \quad D_\mu \varphi_\kappa = (\dot{\varphi}_\kappa, \vec{D}\varphi_\kappa)$

Diese Wirkung hat wieder die Form wie in (a4) mit 5 Komponenten $\varphi_k, \vec{A}$ und kann in der beschriebenen Art quantisiert werden. Zustände in der Schrödinger-Darstellung sind damit Funktionale $\Psi[\varphi_k, \vec{A}]$, und die Impulse $\hat{\pi}_k(\vec{x})$ zu $\hat{\varphi}_k(\vec{x})$ und $\vec{E}(\vec{x})$ zu $\vec{A}(\vec{x})$ werden dargestellt durch:

$$\hat{\pi}_k \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta \varphi_k(\vec{x})} \quad \vec{E}(\vec{x}) \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta \vec{A}(\vec{x})}$$

Die verbliebenen räumlichen Eichtransformationen hängen mit der Superauswahlladung zusammen; für konstantes α betreffen sie nur φ_k und haben die Form, die im letzten Abschnitt betrachtet wurde. Allgemeinere solche Transformationen mit infinitesimaler Parameterfunktion $\delta\alpha(\vec{x})$ werden erzeugt durch:

$$Q_{\delta\alpha}[\varphi_k, \pi_k, \vec{A}, \vec{E}] = \int d^3x \left\{ \delta\alpha(\vec{x}) I_{ke} \pi_k \varphi_e + \frac{1}{e} \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \delta\alpha(\vec{x}) \right\}$$

$$\delta\varphi_k(\vec{x}) = [\varphi_k(\vec{x}), Q_{\delta\alpha}]_{p.k.} = \delta\alpha(\vec{x}) I_{ke} \varphi_e(\vec{x}) \quad (d5)$$

$$\delta\vec{A}(\vec{x}) = [\vec{A}(\vec{x}), Q_{\delta\alpha}]_{p.k.} = \frac{1}{e} \vec{\nabla} \delta\alpha(\vec{x})$$

In der Schrödinger-Darstellung wirkt $\hat{Q}_{\delta\alpha}$ wieder als Eichtransformation der reellen Argumentfunktionen, und man kann damit sogar die endliche Form angeben:

$$(U[\alpha(\vec{x})]\Psi)[\varphi_k, \vec{A}] = \Psi \left[(e^{i\alpha(\vec{x})})_{ke} \varphi_e(\vec{x}), \vec{A}(\vec{x}) + \frac{1}{e} \vec{\nabla} \alpha(\vec{x}) \right] \quad (d6)$$

Für konstante $\alpha(\vec{x}) = \alpha_0$ hatten wir, wenn alle Observablen $U(1)$ invariant sind, als Zustandsraum nur den Raum der Funktionale angesehen, die die Nebenbedingung: $U(\alpha)\Psi = e^{in\alpha}\Psi$ für ein n erfüllen. Betrachten wir die ortsabhängigen Transformationen im gleichen Sinn: alle Observablen sollen mit $U[\alpha(\vec{x})]$ kommutieren für beliebige $\alpha(\vec{x})$. Wir fordern daher, daß sich die Zustände (d6) unter $U[\alpha(\vec{x})]$ nur mit einer Phase transformieren, die eine eindimensionale Darstellung der $U[\alpha(\vec{x})]$ bildet:

$$U[\alpha(\vec{x})]\Psi = e^{i\phi[\alpha(\vec{x})]}\Psi \quad (d7)$$

Um für konstante α die Gesamtladung n zu haben, setzen wir für ϕ das gemittelte α :

$$\begin{aligned} \phi[\alpha(\vec{x})] &= n \bar{\alpha} \\ \bar{\alpha} &= \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int_V d^3x \alpha(\vec{x}) \end{aligned} \quad (d8)$$

Damit sind die Zustandsfunktionale unter jeder auf endliche Raumgebiete beschränkten endlichen Eichtransformation exakt invariant. Das heißt physikalisch, daß auf dem eingeschränkten Zustandsraum das Gauß'sche Gesetz gilt. Für ein infinitesimales $\delta\alpha(\vec{x})$ mit beschränktem Träger haben wir wegen der Invarianz:

$$\begin{aligned} \psi &= U[\delta\alpha] \psi = \left(1 + \frac{i}{\hbar} \hat{Q}_{\delta\alpha}\right) \psi = \\ &\psi + \frac{i}{\hbar} \int d^3x \delta\alpha(\vec{x}) \left\{ I_{ke} \hat{\pi}_k(\vec{x}) \hat{\varphi}_e(\vec{x}) - \frac{1}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) \right\} \psi \end{aligned}$$

$\frac{1}{\hbar} I_{ke} \hat{\pi}_k \hat{\varphi}_e = \hat{\rho}(x)$ ist die Ladungsdichte, da aus der Bedingung für globale Transformationen folgt:

$$\int d^3x \hat{\rho}(\vec{x}) \psi = n \psi$$

und damit gilt lokal in einem Distributionssinn ($\delta\alpha$ war beliebig):

$$\left\{ \hat{\rho}(\vec{x}) - \frac{1}{c\hbar} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) \right\} \psi[\vec{A}, \vec{A}] = 0$$

Für eine Theorie nur mit Photonfeld lautet die Invarianzbedingung

$$\psi[\vec{A}] = \psi\left[\vec{A} + \frac{1}{c} \vec{\nabla} \alpha\right]$$

D.h. das Wellenfunktional hängt nur vom transversalen Photonfeld ab, was die richtige Zahl von Freiheitsgraden ergibt.

e) Zusammenfassung

Wir haben die Quantisierung durch Identifizierung von klassischer Lie-Algebra mit einer quantenmechanischen Kommutationalgebra formal auf Systeme mit einem Kontinuum von Freiheitsgraden ausgedehnt. Das führte auf Schwierigkeiten für eine abstrakte mathematische Charakterisierung des Zustandsraumes; nur in der freien Theorie, wo das Feld ein Kontinuum von harmonischen Oszillatoren darstellt, war eine einfache rekursive Konstruktion durch Erzeugungsoperatoren möglich, die den üblichen Fockraum ergibt.

Diesen haben wir anschließend auch durch zweite Quantelung konstruiert, indem wir die Behandlung von unabhängigen identischen Einteilchen-Systemen in eine Operatorform brachten - ein zweiter unabhängiger Zugang. Der Zahlenkörper $\mathbb{C}$ bzw. sein ausgezeichnete Skalar λ spielten bei der Feldquantisierung die schon besprochene Rolle im Lie-Produkt; bei der zweiten Quantelung ging außerdem wesentlich das Tensorprodukt der $\mathbb{C}$ - Hilberträume ein.

Um den Zusammenhang mit Ladungsgrößen zu bekommen, betrachteten wir dann eine zweikomponentige $O(2)$ invariante Feldtheorie, deren Symmetrie den Raum der Feldkonfigurationen in $SO(2)$ -Orbits einteilte, also Felder die jeweils durch $SO(2)$ Drehung ineinander übergeführt werden. Wegen der vorausgesetzten $SO(2)$ -Invarianz aller Observablen, schränkten wir die Zustände auf solche Funktionale ein, die auf den Orbits in einem Strahl bleiben, also sich nur um eine Phase ändern; das ist gerade der Zusammenhang zwischen der $SO(2)$ Symmetrie und der natürlichen $U(1)$ im komplexen Hilbertraum. Den möglichen Darstellungen der $SO(2)$ durch komplexe Phasen entsprechen die verschiedenen Ladungen, deren Zahl n gerade angibt wie oft die Phase umläuft, wenn man einmal die $SO(2)$ durchläuft. Wir fanden eine enge Analogie zwischen dieser Zustandsraumstruktur und der statistischen Symmetrie - oder Antisymmetrieforderung für Mehrteilchen-Wellenfunktionen. Schließlich "eichten" wir die $SO(2)$; nach einer Diskussion der dynamischen und damit verbundenen Quantisierungsprobleme formulierten wir speziell in der $\hbar_0 = 0$ Eichung eine Bedingung für die Zustandsfunktionale, die die Superauswahlregel der globalen $SO(2)$ verallgemeinerte, und den Zustandsraum im wesentlichen auf eichinvariante Funktionale einschränkt.

V. Quantenmechanik im Quaternionen-Hilbertraum

a) Hilberträume über Quaternionen [3,4,22,23]

In Abschnitt (Ib) haben wir den Zahlenkörper der Quaternionen eingeführt, soweit das zur Diskussion der klassischen $\mathbb{Q}$ -Felder dort nötig war. Wir wollen diesen mathematischen Teil hier zunächst fortsetzen bis zur Definition von Hilberträumen über $\mathbb{Q}$ im Hinblick auf die Realisierung von Quantensystemen in solchen Räumen. Dabei wird besonders eingegangen auf die Abweichungen vom komplexen Fall, die aus der Nichtvertauschbarkeit der Grundzahlen resultiert.

Für Vektoren x, y aus dem zu definierenden Vektorraum postulieren wir die übliche kommutative Addition und die mit ihr verträgliche Skalarmultiplikation:

$$\begin{aligned} \mu, \lambda \in \mathbb{Q}, V_{\mathbb{Q}} \ni x &\rightarrow x \lambda \in V_{\mathbb{Q}} \\ (x+y) \lambda &= x \lambda + y \lambda \\ (x \lambda) \mu &= x (\lambda \mu) \end{aligned} \tag{a1}$$

Die Verknüpfung wird z.B. realisiert durch n -Tupel von Elementen aus $\mathbb{Q}$, den Räumen $\mathbb{Q}^n$:

$$\begin{aligned} x &= (x_1, \dots, x_n) \quad x_i \in \mathbb{Q} \\ x \lambda &= (x_1 \lambda, \dots, x_n \lambda) \in \mathbb{Q}^n \end{aligned}$$

Die Skalarmultiplikation ist hier die komponentenweise Rechtsmultiplikation, und auch in der allgemeinen Definition (a1) werden Skalare immer nach rechts geschrieben. Das ist natürlich Konvention; ist aber eine solche getroffen, dann ist eine zusätzliche skalare Linksmultiplikation nicht basisunabhängig definiert. Mit Hilfe der Skalarmultiplikation lassen sich nun die Begriffe linear unabhängig, Basis in $V_{\mathbb{Q}}$ und Dimension unverändert übernehmen.

Beispiel: $\mathbb{Q}^2$: $x = (i_1, i_2)$, $y = (i_3, 1)$

$$0 = x \lambda + y \mu, \quad \mu, \lambda \in \mathbb{Q} \Rightarrow \mu = \lambda = 0$$

$$\text{denn } \left. \begin{aligned} i_1 \lambda + i_3 \mu &= 0 \\ i_2 \lambda + \mu &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} i_1 \lambda + i_3 (-i_2 \lambda) &= 2 i_1 \lambda = 0 \\ \mu &= -i_2 \lambda \end{aligned}$$

x und y sind also in unserer Konvention linear unabhängig, obwohl sie in der umgekehrten Konvention "parallel" wären:

$$(i_1, i_2) = (i_2 i_3, i_2 1)$$

Um dem Eindruck vorzubeugen, daß die gleichen Strukturen über jeder beliebigen Algebra existieren, wollen wir bemerken, daß für "linear unabhängig" die Nullteilerfreiheit von $\mathbb{Q}$ eine Rolle spielt ($\lambda\mu=0 \Rightarrow \lambda=0$ oder $\mu=0$), und daß in der dritten Zeile von (a1) z.B. in $\mathbb{Q}^n$ die Assoziativität eingeht.

Ist eine Basis $\{e_i\}$ in $V_{\mathbb{Q}}$ gegeben, dessen Dimension endlich oder abzählbar sei, dann besitzt ein allgemeines $x \in V_{\mathbb{Q}}$ eine eindeutige Entwicklung:

$$x = e_i x_i, \quad x_i \in \mathbb{Q}, \quad \text{Summationskonvention}$$

Drückt man e_i in einer anderen Basis aus: $e_i = e'_j M_{ji}$, dann transformieren sich die Komponenten von x :

$$\begin{aligned} x &= e'_j M_{ji} x_i =: e'_j x'_j \\ x'_j &= M_{ji} x_i \end{aligned} \quad (\text{a2})$$

Das ist die allgemeine Form einer linearen Transformation in Komponenten: die übliche Matrixmultiplikation, wobei die einzelnen $\mathbb{Q}$ -Elemente von links wirken. Sie ist linear, weil sie mit der skalaren Rechtsmultiplikation vertauscht - eine Folge der Assoziativität - ohne die Zahlen selbst vertauschen zu müssen.

Neben linearen Operatoren spielen für die Darstellung der Quantenmechanik auch noch solche eine Rolle, die additiv sind und sich zur Skalarmultiplikation folgendermaßen verhalten:

$$A(x\lambda) = (Ax) f(\lambda) \quad A: V_{\mathbb{Q}} \rightarrow V_{\mathbb{Q}}, \quad f(\lambda) \in \mathbb{Q} \quad (\text{a3})$$

Sie bilden "parallele" Vektoren ab auf ebenfalls "parallele" Bildvektoren, und induzieren damit eine Transformation im System der Untervektorräume, die bei der Realisierung von Quantensystemen mit den physikalischen Größen

zusammenhängen; daher ist diese Art von Nichtlinearität tragbar. Die induzierte Abbildung auf dem System der Unterräume ist vertauschbar mit den Operationen lineare Summe und Durchschnitt, die die quantenlogischen Verknüpfungen darstellen. Aus der Additivität von $\mathbf{A}$ und aus (a1) folgt für $f(\lambda)$:

$$\begin{aligned} f(\lambda + \mu) &= f(\lambda) + f(\mu) \\ f(\lambda \mu) &= f(\lambda) f(\mu) \end{aligned}$$

Damit ist f ein Körperautomorphismus (s. Ib15). Während es bei den komplexen Zahlen zwei Automorphismen gibt, $f(\lambda) = \lambda$ und $f(\lambda) = \lambda^*$, und die Operatoren linear und antilinear heißen, gibt es in $\mathbb{Q}$ eine kontinuierliche zur $SO(3)$ isomorphe Schar von Automorphismen von der Form (s. Ib):

$$f(\lambda) = \omega \lambda \omega^*, \quad \omega \in \Omega = \{q \in \mathbb{Q} \mid q^* q = 1\} \quad (\text{a4})$$

Für die zugehörigen Operatoren prägen FJSS [3,4] den Namen kolinear. Genauer wollen wir $\mathbf{A}$ ω -kolinear (äquivalent $(-\omega)$ -kolinear) nennen, wenn gilt:

$$\mathbf{A}(x\lambda) = (\mathbf{A}x) \omega \lambda \omega^* \quad (\text{a5})$$

Mit einem solchen $\mathbf{A}$ ist also eine $SO(3)$ -Rotation verbunden, mit der sich der Imaginärteil von Skalaren dreht, wenn man sie mit $\mathbf{A}$ vertauscht, während bei antilinearen Operatoren eine Spiegelung stattfindet. Ist $\mathbf{A}$ ω -kolinear und $\mathbf{B}$ ω' -kolinear, dann ist das Operatorprodukt (Hintereinanderanwendung) $\mathbf{A} \circ \mathbf{B}$ $(\omega\omega')$ -kolinear und der Ring aller kolinearen Operatoren damit abgeschlossen. Die Skalarmultiplikation selbst, aufgefaßt als Operator,

$$S_q x = x q, \quad q \in \mathbb{Q} \quad (\text{a6})$$

ist i.a. nur kolinear:

$$\begin{aligned} q &= |q| \omega \quad \omega \in \Omega \\ S_q(x\lambda) &= x \lambda q = x \lambda |q| \omega = x \omega \omega^* \lambda |q| \omega = x q \omega^* \lambda \omega = (S_q x) \omega^* \lambda \omega \end{aligned}$$

Bilden wir also das Vielfache eines Operators $\mathbf{A}$, verstanden als Anwendung von $\mathbf{A}$ und anschließender Multiplikation mit einem $\mathbb{Q}$ -Skalar, so ändert sich die Kolinearität der Gesamtoperation.

Durch Hinzunahme eines geeigneten Skalarproduktes zur Vektorraumstruktur erhalten wir einen Hilbertraum, der die nötige Struktur enthält zur Darstellung quantenlogischer Verbände mit Wahrscheinlichkeitsinterpretation. Als Muster eines solchen Skalarproduktes definieren wir im $\mathbb{Q}^n$:

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}^n \ni x &= (x_1, \dots, x_n) & \mathbb{Q} \ni (x, y) &= \sum_i x_i^* y_i \\ \mathbb{Q} \ni y &= (y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

Es hat folgende Eigenschaften, die wir zugleich als allgemeine Definition für abstrakte Hilberträume $H_{\mathbb{Q}}$ nehmen:

- (i) (x, y) additiv in beiden Argumenten
 - (ii) $(x, y\lambda) = (x, y)\lambda$
 - (iii) $(x, y)^* = (y, x)$
 - (iv) $\|x\|^2 = (x, x) \geq 0, \quad \|x\|^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- (a7)

Alle diese Eigenschaften folgen aus der Konjugation $*$ und dem Absolutbetrag in $\mathbb{Q}$. Aus (ii) und (iii) ergibt sich:

$$(x\mu, y\lambda) = \mu^* (x, y) \lambda$$

wobei die Ordnung der Faktoren wesentlich ist. (iii) gilt wie in $\mathbb{C}$, weil $*$ die Faktorreihenfolge der Komponenten umdreht. Für die in (iv) definierte Norm folgen durch einen Beweis, den man vom komplexen Fall übernehmen kann, die Schwarz'sche und die Dreiecksungleichung:

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|, \quad \|x\|^2 = \|y\|^2 \Leftrightarrow x = y \lambda$$

(a8)

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

(a9)

Nachdem wir das Skalarprodukt besitzen, können wir die Begriffe orthogonale Basis und unitärer, d.h. Skalarprodukt erhaltender, Operator einführen. Zu einem linearen Operator A definieren wir den hermitesch adjungierten Operator $A^\dagger$ durch die Gesamtheit seiner Matrixelemente:

$$(x, A^{\dagger} y) = (A x, y) \quad (a10)$$

Für kolineare Operatoren ist (a10) wie bei antilinearen über $\mathbb{C}$ nicht geeignet (für $x \rightarrow x\lambda$ verhalten sich linke und rechte Seite verschieden). Statt dessen lautet die sinnvolle Verallgemeinerung von (a10) für ω -kolineares A :

$$(x, A^{\dagger} y) = \omega^* (A x, y) \omega \quad (a11)$$

Auf das Matricelement wird das Inverse des mit A assoziierten Automorphismus angewandt; damit haben beide Seiten in x das Linearitätsverhalten des Skalarprodukts im linken Argument, und $A^{\dagger}$ ist ein ω^* -kolinearer Operator:

$$\begin{aligned} (x, A^{\dagger} (y\lambda)) &= \omega^* (A x, y\lambda) \omega = \omega^* (A x, y) \lambda \omega = \omega^* (A x, y) \omega \omega^* \lambda \omega \\ &= (x, A^{\dagger} y) \omega^* \lambda \omega = (x, (A^{\dagger} y) \omega^* \lambda \omega) \end{aligned}$$

Außerdem ist $A^{\dagger\dagger} = A$ wieder ω -kolinear, und es gilt $(AB)^{\dagger} = B^{\dagger} A^{\dagger}$; für ω (ω')-kolineares A (B) sind beiden Seiten gerade $(\omega\omega')^* = \omega'^* \omega^*$ -kolinear. Man vergleiche die Definition von adjungiert mit den verschiedenen "Extrasternen" bei antilinearen Operatoren. Durch ähnliche Überlegungen nennen wir einen ω -kolinearen Operator ω -kounitär, wenn gilt

$$(u x, u y) = \omega(x, y) \omega^* \quad (a12)$$

woraus folgt: $u u^{\dagger} = u^{\dagger} u = 1$

Beispiel ist wiederum die Skalarmultiplikation selbst mit Phasenfaktoren, also kolineare Operatoren S_q aus (a6) mit $|q|=1$.

Sei T ein Unterraum im Hilbertraum H_Q und $\{e_i\}$ eine orthogonale Basis in T . Dann ist

$$P_T: P_T x = \sum_i e_i (e_i, x), \quad x \in H_Q \quad (a13)$$

ein linearer hermitescher Operator auf H_Q mit der Eigenschaft $P_T^2 = P_T$, der zu T gehörige Projektionsoperator; wir können wie gewohnt das geometrische Unterraumsystem durch seine Projektorenalgebra behandeln.

Ist $T = H_{\mathbb{Q}}$ der ganze Raum, dann ist $\{e_i\}$ vollständig und P_T die Identität, und wir können abstrakte Operatoren durch ihre Matrixelemente beschreiben. Ist A $\mathbb{Q}$ -kolinear, so gilt für $x = e_i x_i$:

$$\begin{aligned} Ax &= A(e_i x_i) = (Ae_i) \omega x_i \omega^* = \\ e_j (e_j, Ae_i) \omega x_i \omega^* &= e_j A_{ji} \omega x_i \omega^* \end{aligned} \quad (a14)$$

In Komponenten wirkt also erst der basisunabhängige Automorphismus gefolgt von der linearen Operation der Form (a2) mit den basisabhängigen Matrixelementen $A_{ji} = (e_j, Ae_i)$.

Zusammenfassend stellen wir fest: Es ist klar geworden, daß für viele Hilbertraumkonzepte die Vertauschbarkeit der Grundzahlen unwesentlich ist, und diese daher in $H_{\mathbb{C}}$ und $H_{\mathbb{Q}}$ gleichermaßen konsistent definierbar sind; viel wichtiger sind der Absolutbetrag und die Assoziativität, die ja gerade $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ und $\mathbb{Q}$ auszeichnen. Der Hauptunterschied bei $H_{\mathbb{Q}}$ liegt im Begriff der Linearität bezüglich Multiplikation mit beliebigen $\mathbb{Q}$ -Zahlen; es gibt ein $SO(3)$ -Kontinuum von Klassen kolinearer Operatoren als Erweiterung der zwei Klassen linear und antilinear in $H_{\mathbb{C}}$, eine direkte Folge der verschiedenen Automorphismen Gruppen $\mathbb{Z}_2$ und $SO(3)$.

b) Realisierung von Quantensystemen im $\mathbb{Q}$ -Hilbertraum

Im Kapitel II haben wir die abstrakte Verbandsstruktur der Quantenmechanik aus der üblichen komplexen Form abstrahiert; das gibt uns jetzt die Möglichkeit solche Verbände in $H_{\mathbb{Q}}$ darzustellen. Da sind zunächst die Propositionen Δ , mögliche ja-nein-Experimente, die wir mit Unterhilberträumen in $H_{\mathbb{Q}}$ assoziieren oder gleichwertig mit den zugehörigen Projektionsoperatoren P_{Δ} . Die P_{Δ} sind lineare hermitesche Operatoren mit den üblichen Eigenschaften, so daß sich hier zunächst an der Kinematik nichts ändert gegenüber $H_{\mathbb{C}}$. Aus Propositionen bauen sich kompliziertere Observable auf - physikalisch durch gleichzeitige Messung komptatibler Propositionen, mathematisch durch die Spektralzerlegung (Anhang B) allgemeiner hermitescher Operatoren, die für $H_{\mathbb{Q}}$ ebenso existiert wie für $H_{\mathbb{C}}$ [22].

Unter einem reinen Zustand stellen wir uns einen eindimensionalen Unterraum in H_Q vor; die ja-Wahrscheinlichkeit w_Δ der Proposition P_Δ errechnet sich, indem man einen normierten Vektor ψ aus diesem Unterraum wählt und bildet:

$$0 \leq w_\Delta = (\psi, P_\Delta \psi) \leq 1 \quad (b1)$$

w_Δ ist reell und hängt nicht von der Wahl von ψ ab:

$$w_\Delta^* = (P_\Delta \psi, \psi) = (\psi, P_\Delta^* \psi) = (\psi, P_\Delta \psi) = w_\Delta$$

sei $\psi' = \psi \omega$: $(\psi \omega, P_\Delta \psi \omega) = \omega^* (\psi, P_\Delta \psi) \omega = \omega^* w_\Delta \omega = w_\Delta$,

denn $[w_\Delta, \omega] = 0$, da w_Δ reell ist. Um den allgemeineren Begriff der Dichtematrix einzuführen, müssen wir eine Spur definieren; seien A und B lineare Operatoren in H_Q mit Matrixelementen A_{ke} , B_{ke} in einer Basis $\{e_k\}$; die Spur in der üblichen Form hätte nicht die zyklische Vertauschbarkeit

$$A_{ke} B_{ek} \neq B_{ek} A_{ke},$$

weil die einzelnen Matrixelemente i.a. nicht vertauschen; sie wäre damit nicht invariant unter Ähnlichkeitstransformationen und basisabhängig. Jedoch ist der Realteil beider Seiten gleich, weil nach (Ib11) für $q, q' \in Q$ gilt: $\text{Re}(qq') = \text{Re}(q'q)$. Wenn wir also in H_Q definieren

$$\text{Tr } A = \text{Re } A_{kk} = \text{Re } (e_k, A e_k), \quad (b2)$$

dann haben wir für Tr die gewünschten Eigenschaften. Die Wahrscheinlichkeit w_Δ lautet dann mit dem zu ψ gehörenden Projektor W_ψ :

$$\begin{aligned} W_\psi x &= \psi (\psi, x) \\ \text{Tr } P_\Delta W_\psi &= \text{Re } (e_k, P_\Delta W_\psi e_k) = \\ &= \text{Re}[(e_k, P_\Delta \psi) (\psi, e_k)] = \text{Re}[(\psi, e_k) (e_k, P_\Delta \psi)] = \\ &= \text{Re } (\psi, P_\Delta \psi) = (\psi, P_\Delta \psi) = w_\Delta \end{aligned}$$

wobei wiederum wegen des Re -Zeichens die Q -Faktoren vertauscht werden konnten. Jetzt können wir auch die Möglichkeit nicht reiner Zustände zulassen, indem wir statt W_ψ eine allgemeine normierte Dichtematrix einsetzen:

$$W^\dagger = W > 0, \text{Tr} W = 1 \quad (\text{vgl. IIId2})$$

und für die Wahrscheinlichkeit schreiben:

$$w_A = \text{Tr} P_A W = \text{Tr} W P_A \quad (\text{b3})$$

Das ist dann die allgemeine Form des Zustandes als Abbildung vom Verband der Projektoren in H_Q in das reelle Intervall $[0,1]$.

Wie in (IIId) erläutert, müssen wir als Rahmen für die Dynamik und die Darstellung von Symmetrien die Automorphismengruppe des durch die Unterräume in H_Q dargestellten Verbandes kennen; wir brauchen also eine Quaternionenversion des Wigner'schen Theorems. Diese ist zu finden in [23,24]:

Jede Abbildung von H_Q auf sich, die quantenlogische Relationen zwischen Unterräumen erhält, wird durch einen kounitären Operator gegeben. D.h. Abbildungen derart, daß für Unterräume $\Delta_1, \Delta_2 \subset H_Q$ die auf $\tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_2$ abgebildet werden gilt:

$$\begin{aligned} \widetilde{\Delta_1 \cup \Delta_2} &= \tilde{\Delta}_1 \cup \tilde{\Delta}_2 & \cup &: \text{lineare Summe} \\ \widetilde{\Delta_1 \cap \Delta_2} &= \tilde{\Delta}_1 \cap \tilde{\Delta}_2 & \cap &: \text{Durchschnitt} \\ \widetilde{\Delta_1'} &= \tilde{\Delta}_1' & ' &: \text{Orthokomplement,} \end{aligned}$$

sind von der Form $\tilde{\Delta}_i = U \Delta_i$ mit kounitärem U bzw. für die Projektoren:

$$P_{\tilde{\Delta}} = U P_{\Delta} U^\dagger = U P_{\Delta} U^{-1} \quad (\text{b4})$$

wobei mit P_{Δ} auch $P_{\tilde{\Delta}}$ wieder linear ist, da sich die Kolinearitätseigenschaften von U und $U^\dagger$ nach a) wegheben. Die Verhältnisse liegen also auch hier recht ähnlich wie im Komplexen, nur ist "unitär oder antiunitär" ersetzt durch den Begriff kounitär. In H_C sind die unitären oder antiunitären Operatoren eindeutig bis auf eine Phase. Das Gleiche gilt in H_Q im folgenden Sinn: Betrachten wir statt des ω -kounitären U das Produkt $U S_\alpha$. S_α ist der α^* -kounitäre Operator der Skalarmultiplikation mit $\alpha \in \mathbb{Q}$, einer $\mathbb{Q}$ -Phase (s. a6, a12). $U S_\alpha$ ist dann $(\omega \alpha^*)$ -kounitär und hat auf den Unterräumen dieselbe Wirkung wie U :

$$U S_\alpha P_{\Delta} (U S_\alpha)^\dagger = U S_\alpha P_{\Delta} S_\alpha^\dagger U^\dagger = U P_{\Delta} U^\dagger \quad (\text{b5})$$

denn P_Δ als linearer Operator vertauscht mit S_α , und $S_\alpha S_\alpha^\dagger = 1$.

Ein und dieselbe Transformation wird also auch hier durch eine von Phasen unterschiedene Menge kounitärer Operatoren gegeben; der Unterschied ist, daß die Phasen selbst auf kanonische Weise als kounitäre Operatoren anzusehen sind. Sie vertauschen zwar nicht mit U , aber auch die Linksmultiplikation mit S_α bringt nichts Neues:

$$U S_\alpha x = U(x\alpha) = (Ux) \omega_\alpha \omega^* = S_{\omega_\alpha \omega^*} Ux \quad \text{für } x \in H_Q$$

$\omega_\alpha \omega^*$ ist auch eine Phase, und alle Phasen werden so erreicht. Wählen wir insbesondere $\alpha = \pm \omega$, dann ist $U S_\alpha$ sogar linear; damit kann jeder Automorphismus sogar auf genau zwei durch das Vorzeichen unterschiedene Arten durch unitäre Transformationen induziert werden, im Gegensatz zum komplexen Fall mit antiunitären Operatoren. Der tiefere Grund sind wieder die Automorphismengruppen der Zahlensysteme, wodurch es in H_C zwei diskret verschiedene Arten von kolinearen Operatoren gibt, während diese in H_Q ein Kontinuum bilden.

c) Energie und Dynamik in Q -Quantensystemen

In einem Q -Quantensystem denken wir uns dessen dynamische Gruppe gegeben als Schar U_t von kounitären Operatoren, die die Zeitentwicklung der Projektoren (Heisenbergbild) bzw. Dichtematrix (Schrödingerbild) in der Form $U_t^\dagger P_\Delta U_t$ bzw. $U_t W U_t^\dagger$ vermitteln. Aus physikalischen Gründen muß gelten:

$$\begin{aligned} U_{t=0} &= S_{\omega^*(0)} \\ U_{t_1} U_{t_2} &= U_{t_1+t_2} S_{\omega(t_1, t_2)} \end{aligned} \quad (c1)$$

denn alle U sind nur physikalisch relevant bis auf Faktoren S_ω , die auf den Unterräumen die Identität darstellen, das heißt mathematisch: $\{U_t\}$ sind eine projektive Darstellung der Zeitachse als additiver Gruppe von reellen Zahlen. Es gibt eine physikalisch äquivalente unitäre Vektordarstellung; wenn U_t $\omega(t)$ -klinear ist, bilden wir wieder $\tilde{U}_t = U_t S_{\omega(t)}$, das linear ist mit $\tilde{U}_{t=0} = 1$. Für $\tilde{U}_t$ gilt immer noch (c1) mit gewissen neuen $\tilde{\omega}(t_1, t_2)$:

$$\tilde{U}_{t_1} \tilde{U}_{t_2} = \tilde{U}_{t_1+t_2} S_{\tilde{\omega}(t_1, t_2)}$$

$S\tilde{\omega}(t_1, t_2)$ muß nun mit $\tilde{U}_t$ auch linear sein, also $\tilde{\omega} = \pm 1$, und wegen $\tilde{\omega}(0, t_2) = 1$ und Stetigkeit $\tilde{\omega} \equiv 1$. Also nehmen wir als dynamische Gruppe unitäre U_t mit $U_{t_1} U_{t_2} = U_{t_1+t_2}$ genau wie im komplexen Fall. Diese Extraktion der unitären Vektordarstellung aus der projektiven Darstellung ist allerdings im Gegensatz zu H_Q eindeutig; dort ist mit $U = e^{-iHt}$ auch immer $\tilde{U}_t = e^{-iE_0 t} U_t = e^{-i(H+E_0)t}$ eine physikalisch äquivalente Darstellung der dynamischen Gruppe, was der Irrelevanz des Nullpunktes der Energieskala entspricht. Der Unterschied kommt daher, daß in H_Q nur die Phasenmultiplikation S_ω mit $\omega = \pm 1$ linear ist. Die einparametrische Gruppe können wir durch einen antihermiteschen Generator A in Exponentialform darstellen:

$$-A = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (U(t) - 1), \quad U(t) = e^{-At} \quad (c2)$$

Was in H_Q fehlt, ist die Möglichkeit, mit A auf triviale Art eine (hermitesche) Energie-Observable durch den Faktor i zu verbinden. In [22] Kap. 6 sind durch Spektralmethoden allgemeine Sätze über normale Operatoren (A normal $\Leftrightarrow [A, A^\dagger] = 0$) in H_Q bewiesen; spezialisieren wir diese auf antihermitesche Operatoren, dann ergibt sich eine kanonische Form, die der komplexen recht nahe kommt. Nach [22] gibt es zu A eine eindeutige Zerlegung $A = \gamma H$ in lineare Operatorfaktoren, derart, daß:

- i) $\gamma = -\gamma^\dagger, H = H^\dagger$ ($\Rightarrow [\gamma, H] = 0, [\gamma, A] = 0$)
- ii) $(1 - \gamma\gamma^\dagger)$ ist der Projektor auf den Nullraum N von A : $(1 - \gamma\gamma^\dagger)x = x \Leftrightarrow Ax = 0, x \in H_Q$
($\Rightarrow$ eingeschränkt auf das Komplement $N_\perp$ ist $\gamma\gamma^\dagger|_{N_\perp} = 1 = -\gamma^2|_{N_\perp}$, also $\gamma|_{N_\perp}$ unitär.)
- iii) $H \geq 0|_{N_\perp}$ (nur pos. Eigenwerte), $Hx = 0 \Leftrightarrow x \in N$
- iv) Für Operatoren B , $[B, A] = 0$ gilt einzeln:

$$[B, \gamma] = [B, H] = 0$$

Die Rolle des i hat der Operator γ übernommen, der zwar mit H , aber nicht notwendig mit beliebigen linearen Operatoren vertauscht wie i . Wir wollen den tiefliegenden Satz plausibel machen, zunächst durch das Beispiel der Quaternionen selbst als Hilbertraum Q^1 . $q \in Q$ ist dann ein Vektor und der lineare Operator A wirkt durch Linksmultiplikation:

$$Aq \hat{=} aq, \quad a = -a^* \neq 0$$

Dann entspricht der Zerlegung $A = \gamma H$ die Zerlegung

Betrag mal Phase: $a = \frac{a}{|a|} |a|, \quad \gamma \hat{=} \frac{a}{|a|}, \quad H \hat{=} |a|$

Für andere $\mathcal{Q}$ -Hilberträume kann man sich die Konstruktion heuristisch ähnlich klarmachen:

Auf dem Nullraum N von A setzen wir $\mathcal{Y}|_N = H|_N = 0$; auf $N_\perp$ ist $AA^\dagger$ hermitesch und echt positiv, so daß (z.B. in einer diagonalen Basis)

$\sqrt{AA^\dagger}$ existiert und die gleiche Eigenschaft hat; man setze dann auf $N_\perp$ $H = \sqrt{AA^\dagger}$ und $\mathcal{Y} = A(\sqrt{AA^\dagger})^{-1}$.

Insbesondere wird klar, daß H deshalb positiv ist, weil, um Eindeutigkeit der Zerlegung zu erreichen, alle möglichen Vorzeichen von Eigenwerten in $\mathcal{Y}$ absorbiert sind; diese Eigenschaft ist physikalisch natürlich willkommen, und bestärkt uns, versuchsweise H als Energie zu interpretieren und damit $\mathcal{Y}$ als Ersatz von $\hat{\lambda}$ in der Rolle des Vermittlers zwischen Observable H und Dynamik $e^{-\mathcal{Y}Ht}$. Eigentlich hat H mit A und $\sqrt{AA^\dagger}$ die Dimension einer inversen Zeit, da $U_t = e^{-tH}$, so daß nur $H' = \hbar H$ eine Energie ist; man braucht also hier $\hbar$, um von der als gegeben angenommenen Dynamik durch die Faktorisierung wirklich zu Energiegrößen zu kommen. Weil $\mathcal{Y}$ ein Operator ist, der i.a. nicht mit allen Größen vertauscht, müssen wir uns fragen, was die nichttrivialen Eigenschaften von $\mathcal{Y}$ physikalisch bedeuten. Die Aussage (c3) (iv) besagt, daß erhaltene Observablen auch stets mit H kompatibel sind. Die Frage, ob für Observable auch gilt $[B, \mathcal{Y}] = 0$ hängt mit der Umkehrbarkeit dieses Schlusses zusammen, daß jede mit H vertauschende Größe dann auch erhalten ist (von expliziter Zeitabhängigkeit sei hier abgesehen). (c3) würde für B im Prinzip auch die Situation zulassen:

$$[B, H] = 0 \quad [B, A] \neq 0 \quad \text{falls} \quad [B, \mathcal{Y}] \neq 0 \quad (c4)$$

Wir wollen uns jedoch zunächst mit dem einfacheren Fall vertraut machen, wo Erhaltung und Entartung äquivalent sind, und annehmen, daß alle Observablen - wie H schon durch seine Konstruktion - mit $\mathcal{Y}$ vertauschen, das damit dem üblichen $\hat{\lambda}$ noch mehr ähnelt.

Zusammen mit $\mathcal{Y}$ vertauschen auch die Projektoren $\mathcal{Y}\mathcal{Y}^\dagger = -\mathcal{Y}^2$ und $(1 - \mathcal{Y}\mathcal{Y}^\dagger)$ mit Observablen und Evolutionsoperator. Sie teilen also den Zustandsraum $H\mathcal{Q}$ in zwei orthogonale Sektoren auf, die unter Reduktion von Zuständen durch Messung von Observablen und unter Zeitentwicklung invariant sind. Das ist wiederum eine Superauswahl-Situation, und wir schränken den physikalischen Zustandsraum auf eine der Komponenten ein, so daß dort entweder gilt $\mathcal{Y}\mathcal{Y}^\dagger = 1$ oder $\mathcal{Y}\mathcal{Y}^\dagger = 0$. Der zweite Fall bedeutet

nach ii), daß A identisch verschwindet und die Dynamik trivial ist $U_t \equiv 1$. Wir wollen also im Folgenden annehmen, daß $\mathcal{U}\mathcal{U}^\dagger = 1$ auf dem betrachteten physikalischen Zustandsraum, was ja sowieso der Fall ist, wenn der Nullraum von A nur aus dem Vektor 0 besteht.

Stellen wir uns jetzt einen maximalen Satz kommutierender Observabler $\{B_k\}$ vor, für die eine Messung die (reellen) Werte $\{b_k\}$ ergab. Physikalisch ist notwendig, daß dazu ein Strahl im Hilbertraum gehört, beschrieben durch einen normierten Vektor ψ und seine skalaren Vielfachen. Wegen der vorausgesetzten Vertauschbarkeit mit $\mathcal{U}$ wissen wir aber, daß mit ψ auch $\mathcal{U}\psi$ ein Vektor mit Werten $\{b_k\}$ ist. Wir verlangen daher, daß $\mathcal{U}\psi$ in dem eindeutig bestimmten Strahl liegt und daher:

$$\mathcal{U}\psi = \psi\eta \quad (c5)$$

Weil $\mathcal{U}$ unitär antihermitesch ist, ist der "Eigenwert" η imaginär vom Betrag 1:

$$1 = (\psi, \psi) = (\mathcal{U}\psi, \mathcal{U}\psi) = (\psi\eta, \psi\eta) = \eta^* (\psi, \psi) \eta = \eta^* \eta$$

$$\eta = (\psi, \psi\eta) = (\psi, \mathcal{U}\psi) = (\mathcal{U}^\dagger \psi, \psi) = -(\mathcal{U}\psi, \psi) = -(\psi, \mathcal{U}\psi)^* = -\eta^*$$

(c5) ist keine Eigenwertgleichung im üblichen Sinn; die Mannigfaltigkeit ihrer Lösungen ist z.B. kein Untervektorraum, denn ein anderer Vektor $\psi\eta$ aus dem Strahl erfüllt die Gleichung:

$$\mathcal{U}\psi\eta = \psi\eta\eta = \psi\eta\eta^{-1}\eta$$

und $\eta^{-1}\eta\eta$ ist i.a. ein anderes imaginäres Einheitsquaternion. (c5) kann also nicht als Superauswahlregel im üblichen Sinn verstanden werden, die den Raum der physikalisch realisierbaren Zustände als Unterraum des ursprünglichen Hilbertraums bestimmt. Das liegt daran, daß (c5) im $\mathbb{Q}$ -Sinn eine multiplikativ-nichtlineare Gleichung ist, da $\mathcal{U}$ linear ist, die η -Multiplikation aber η -kolinear.

In (Ib13) haben wir gelernt, daß jedes $\eta \in \mathbb{Q}$, $\eta^2 = -1$ eine Einbettung der komplexen Zahlen liefert, durch Identifikation von i mit η ; wir nennen diesen Unterkörper von $\mathbb{Q}$ $\mathbb{C}_\eta$:

$$\mathbb{Q} \supset \mathbb{C}_\eta = \{a + b\eta \mid \mathbb{Q} \ni \eta, \eta^2 = -1, a, b \in \mathbb{R}\} \quad (c6)$$

Es ist leicht zu sehen, daß die Lösungen von (c5) einen Vektorraum über

$\mathbb{C}_\eta$ bilden, denn bezüglich dieser eingeschränkten Skalare sind beide Seiten linear. Sie sind ebenfalls ein Unterhilbertraum, d.h. das Skalarprodukt "macht die Einschränkung des Körpers mit"; seien ψ_1, ψ_2 irgendwelche Lösungen von (c5):

$$\begin{aligned} (\psi_1, \psi_2)_\eta &= (\psi_1, \psi_2)_\eta = (\psi_1, \gamma \psi_2) = (\gamma^\dagger \psi_1, \psi_2) = -(\gamma \psi_1, \psi_2) \\ &= -(\psi_1 \eta, \psi_2) = \eta (\psi_1, \psi_2) \Rightarrow (\psi_1, \psi_2) \in \mathbb{C}_\eta \end{aligned}$$

(ψ_1, ψ_2) aus $\mathbb{Q}$ kommutiert also mit η und ist daher notwendig von der Form $a+b\eta$. Wir nennen den komplexen Hilbertraum über $\mathbb{C}_\eta$ von Lösungen (c5) $H_\mathbb{Q}^\eta$; $\mathbb{C}_\eta$ ist Teilmenge von $\mathbb{Q}$ und $H_\mathbb{Q}^\eta$ ist Teilmenge von $H_\mathbb{Q}$. $\eta, \eta^2 = -1$ war frei gewählt, während γ ein fester Operator ist; offenbar führen verschiedene η zu völlig isomorphen $\mathbb{C}$ -Unterhilberträumen, aber man muß eines auswählen. Wir können nun die Existenz des kommutierenden verallgemeinerten Superauswahloperators γ so interpretieren, daß er uns zwingt, um eine eindeutige Quantenbeschreibung zu bekommen, den Zustandsraum zusammen mit dem Zahlensystem einzuschränken. Das ist wieder analog zu sehen zur Statistik mit Fermi- oder Bosesymmetrie und zur Ladung mit der Festlegung von n ; hier wählen wir η aus einem Kontinuum der Mächtigkeit S^2 ; während verschiedene Statistik und verschiedene Gesamtladung physikalisch bemerkbar sind, scheinen verschiedene η ununterscheidbar zu sein.

Die Situation wird vielleicht klarer, wenn wir uns überlegen, unter welchen Umständen in gleicher Weise sich eine komplexe auf eine reelle Theorie reduzieren könnte. Dazu schreiben wir (c5) etwas um, indem wir statt γ zu einem gewählten η den η -kunitären hermiteschen Operator $U\psi = -\gamma\psi\eta$, $U^2 = 1$, $U^\dagger = U$ (beide η -kolinear) bilden, der wie γ nach Annahme mit allen Observablen vertauscht. Die Superauswahlbedingung lautet dann: $U\psi = \psi$. Dazu wäre in einem komplexen Raum analog die Existenz eines hermiteschen antiunitären Operators K , der mit Observablen und Dynamik vertauscht. Man würde für komplexe Zustandsvektoren die Bedingung aufstellen: $K\psi = c\psi$ und wegen $1 = K^\dagger K = K^2$ müßte c eine Phase sein, $c = e^{i\alpha}$. Die Lösungsmannigfaltigkeit bildet auch hier, da die Bedingung nicht $\mathbb{C}$ -linear ist, einen Unterraum nur, wenn man die Skalare auf $\mathbb{R}$ beschränkt. Diese Einschränkung ist ebenfalls mit dem Skalarprodukt verträglich: $(\psi_1, \psi_2) = (c\psi_1, c\psi_2) =$

$= (K\psi_1, K\psi_2) = (\psi_1, \psi_2)^*$, da das Produkt zweier Lösungen reell ist. Ein solcher K -Operator würde also zu jeder Phasenwahl von $C = e^{i\alpha}$ die Theorie durch Superauswahlregel auf eine reelle reduzieren. Allerdings gibt es in keiner physikalischen Theorie ein solches K ; wenn Observable existieren, die $[q, p] \sim i$ erfüllen, können nicht beide mit dem antilinearen K kommutieren. Ebenso können nicht $U_t = e^{-itH}$ und H mit K vertauschen. Die kanonisch konstruierten Theorien sind sozusagen maximal nichtreell. Die Frage ist, ob sich $\mathcal{Q}$ -Theorien dagegen immer reduzieren, denn jede $\mathcal{C}$ -Theorie kann als reduzierte $\mathcal{Q}$ -Theorie mit γ -Superauswahlprinzip aufgefaßt werden.

d) Poincaré-invariante $\mathcal{Q}$ -Quantensysteme [23].

Nachdem wir im letzten Abschnitt die $\mathcal{Q}$ -Quantenmechanik von der dynamischen Gruppe her analysiert haben, wollen wir jetzt von einer Darstellung der ganzen (eigentlich orthochronen) Poincaré-Gruppe ausgehen, die wir wieder als gegeben voraussetzen. Die Theoreme in [23] über Darstellungstheorie im $\mathcal{Q}$ -Hilbertraum sagen uns, daß wir aus jeder projektiven kunitären Darstellung - der physikalisch primär notwendigen Form - eine unitäre stetige Darstellung extrahieren können, die möglicherweise (halbzahliger Spin) zweiwertig ist:

$U_{g_1} U_{g_2} = \pm U_{g_1 g_2}$ für g_1, g_2 aus der Poincaré-Gruppe. Aus infinitesimalen Transformationen können wir wie in (c2) antihermitesche Generatoren

A_μ für Translationen und $L_{\kappa\lambda}$ für Boost und Drehungen konstruieren. Der Massen-Casimir-Operator lautet:

$$M^2 = A_\mu^\dagger A^\mu = -A_\mu A^\mu \quad (d1)$$

und sollte für physikalische Darstellungen positiv sein: $M^2 \geq 0$.

Man könnte nun jedes der vier A_μ faktorisieren gemäß Theorem (c5):

$A_\mu = \gamma_\mu P_\mu$ (keine Summe). Doch dann erhielten alle P_μ positive Spektren was physikalisch nicht sinnvoll ist. Diese Spektralbedingung ist nur bei P_0 erwünscht, und wir wollen versuchen sein $\gamma_0 =: \gamma$ für alle Generatoren zu verwenden. Zunächst stellen wir fest, daß nach (c5)(iv) gilt $[\gamma, A_\mu] = 0$ wegen $[A_0, A_\mu] = 0$, einer Relation der Gruppenalgebra. Das besagt einerseits, daß γ translationsinvariant ist und andererseits, daß γ auch bei A_i , $i=1,2,3$, den Übergang zu hermiteschen P_i leistet:

$$P_i = -\gamma A_i = -A_i \gamma = P_i^\dagger \quad (d2)$$

$(1-\gamma\gamma^\dagger)$ ist nach (c5)(ii) Projektor auf den Nullraum von A_0 . D.h. $\gamma\gamma^\dagger$ verschwindet dort und ist 1 auf dem Komplement. Für $M^2 \geq 0$ -Darstellungen ist der Nullraum von A_0 in denen jedes A_i enthalten:

$$A_0 x = 0 \Rightarrow (x, A_0^\dagger A_0 x) = 0; \text{ wegen } 0 \leq (x, (A_0^\dagger A_0 - \sum_i A_i^\dagger A_i) x) \\ \text{folgt } (x, A_i^\dagger A_i x) = 0 \Rightarrow A_i x = 0 \text{ für alle } i.$$

Daher gilt $\gamma\gamma^\dagger A_i = A_i$, und man kann (d2) umkehren: $A_i = \gamma P_i$,
und M^2 läßt sich auch durch P^μ ausdrücken:

$$M^2 = (\gamma P_\mu)^\dagger (\gamma P^\mu) = \gamma^\dagger \gamma P_\mu P^\mu = P_\mu P^\mu \quad (d3)$$

Für $L_{\kappa\lambda}$ haben wir mit A_μ die Vertauschungsrelationen der Gruppe:

$$[L_{\kappa\lambda}, A_\mu] = (g_{\kappa\mu} g_\lambda{}^\nu - g_{\lambda\mu} g_\kappa{}^\nu) A_\nu \quad (d4)$$

Daraus folgt für $P_\mu = -\gamma A_\mu$

$$[L_{\kappa\lambda}, P_\mu] = -\gamma [L_{\kappa\lambda}, A_\mu] - [L_{\kappa\lambda}, \gamma] A_\mu \\ = (g_{\kappa\mu} g_\lambda{}^\nu - g_{\lambda\mu} g_\kappa{}^\nu) P_\nu - [L_{\kappa\lambda}, \gamma] A_\mu \quad (d5)$$

Klarerweise muß der letzte Term verschwinden, wenn wir das konstruierte P_μ als physikalischen Energie-Impuls-Operator mit Vektorverhalten unter Lorentztransformationen interpretieren wollen. Wir erinnern uns, wie γ heuristisch gebildet wurde: $\gamma = \frac{A_0}{\sqrt{A_0^\dagger A_0}}$. Wäre A^μ ein zeitartiger Vektor mit Zahlen als Komponenten, dann wäre γ Lorentzinvariant für orthochrone Transformationen. Ein Beweis für Operatoren ist uns aber nicht bekannt, und wir wollen einfach nur Darstellungen mit $[L_{\kappa\lambda}, \gamma] = 0$ als physikalisch ansehen, falls es andere überhaupt gibt. Damit können wir

auch mit den Generatoren der Lorentz-Untergruppe hermitesche Observable assoziieren:

$$M_{\kappa\lambda} = \gamma L_{\kappa\lambda} = M_{\kappa\lambda}^\dagger \quad (d6)$$

Wir haben also zehn Observable $\{P_\mu, M_{\kappa\lambda}\}$ aus der unitären Darstellung der Poincaré-Gruppe gewonnen und ein γ der gleichen Art wie im letzten Abschnitt. Auf Grund der Konstruktion vertauschen alle diese Observablen mit γ ; gibt es keine weiteren, wie Ladungen, dann sind wir genau in der Lage, die in c) zur γ -Superauswahlregel und zur Reduktion auf die komplexe Theorie führte, wo γ einfach durch das gewählte skalare η ersetzt werden kann, das dann dem gewöhnlichen i entspricht. Das bedeutet, daß, solange man nur die mit der Raumzeit verknüpften Observablen in der Theorie hat, die möglichen Darstellungen der Poincaré-Gruppe durch $\mathbb{Q}$ -Quantensysteme die gleichen sind wie im Komplexen, daß es also keine neuen Sorten von freien Teilchen gibt.

Ein interessanter Punkt ist noch die Operation der Zeitumkehr [23]. Wie das Wigner-Theorem für den $\mathbb{Q}$ -Hilbertraum (b)) besagt, ist in $H_{\mathbb{Q}}$ jede physikalische Transformation durch einen unitären Operator darstellbar, also auch die Zeitumkehr durch ein unitäres T . Als Gruppenrelation muß gelten:

$$T A^0 T^\dagger = -A^0 \quad T A^i T^\dagger = +A^i \quad (d7)$$

damit T das Vorzeichen von Zeit-Translationen umdreht. Die Observablen $P^\mu = -\gamma A^\mu$ sollen sich physikalisch genau mit dem umgekehrten Vorzeichen transformieren, so daß gelten müßte $T \gamma T^\dagger = -\gamma$, was aus der heuristischen Form von $\gamma = \frac{A^0}{\sqrt{A^0 A^0}}$ wiederum plausibel aber nicht bewiesen ist. T ist also die erste Größe, die mit γ nicht kommutiert, sondern statt dessen antikommutiert. Das erinnert selbstverständlich sehr an das Verhalten von i bei antiunitären Transformationen. Die Transformation $x \rightarrow T x$ auf $H_{\mathbb{Q}}$ ist mit der Superauswahlbedingung (c5) nicht verträglich. Wenn wir aber neben η noch ein imaginäres Einheitsquaternion ν wählen, so daß $\{\eta, \nu\} = 0$, können wir statt T den Operator $T' = T S_\nu$ als Zeitumkehr ansehen; er ist ν -kounitär und physikalisch äquivalent zu T , da er sich nur durch $\mathbb{Q}$ -Phasenmultiplikation unterscheidet. T' ist mit (c5) verträglich:

$$\begin{aligned} \gamma x = x \eta &\Rightarrow \gamma (T'x) = \gamma T x v = -T \gamma x v = -T x \eta v \\ &= T x v \eta = (T'x) \eta \end{aligned}$$

Wir können also auf $H_{\mathbb{Q}}^2$ über $\mathbb{C}_{\eta}$ einschränken und dabei die Einschränkung von T' mitnehmen. Das v -kounitäre T' wirkt in $H_{\mathbb{Q}}^2$ gerade antilinear: sei $C = a + b\eta \in \mathbb{C}_{\eta}$:

$$T'(xC) = (T'x) v C v^* = (T'x) v (a + b\eta) v^* = (T'x) (a - b\eta) = (T'x) C^*$$

Wenn also in der Quaternionentheorie ein (linearer) Zeitumkehroperator existiert, dann gibt es stets auch einen in der durch die γ -Superauswahlregel abgeleiteten $\mathbb{C}$ -Theorie, der dann dort antilinear ist.

e) Beispiel eines echten $\mathbb{Q}$ -Quantensystems

Wir haben für eine vorgegebene dynamische Gruppe in $H_{\mathbb{Q}}$ und für eine Dynamik im Rahmen der Poincaré-Gruppe eine Methode angegeben mit antihermiteschen Generatoren hermitesche Observable zu assoziieren. Sie führte automatisch auf eine positive Energie und lieferte einen antihermiteschen unitären Operator γ , der mit allen so konstruierten Observablen und der Zeitentwicklung vertauscht. Das wiederum verwandelt die Theorie durch eine Art Superauswahlregel in eine normale komplexe. Die nichttriviale Erweiterung der Poincaré-Algebra als gruppentheoretischer Ausgangspunkt stößt auf Schwierigkeiten wegen No-Go-Theoremen wie im Komplexen (s. Anhang E); erweitern wir sie aber durch ein direktes Produkt, dann vertauschen die weiteren Generatoren mit R_0 und daher auch wieder mit γ . Die "Eselsbrücke" der korrespondenzmäßigen kanonischen Quantisierung ist nicht ohne weiteres brauchbar, da die Observablen in $H_{\mathbb{Q}}$ kein natürliches Lie-Produkt wie in $H_{\mathbb{C}}$ besitzen, was wieder daran liegt, daß der Kommutator zweier Observabler antihermitesch und der Übergang davon zu einer dritten Observable nichttrivial ist. Es erhebt sich die Frage, ob man überhaupt eine Quantentheorie mit echter Quaternionenstruktur konstruieren kann. Wir können diese Frage nun wenigstens durch die Konstruktion einer Art Spielzeugmodell bejahen. Wir werden die Quantentheorie des zweidimensionalen $\mathbb{Q}$ -Hilbertraumes allgemein und explizit konstruieren durch Angabe sämtlicher Propositionen und Automorphismen des Verbandes. Es handelt sich also um eine Art Spin-System

und um das Vorgehen klarer zu machen, wollen wir kurz skizzieren, wie man auf gleiche Art das gewöhnliche komplexe Spinsystem konstruieren würde.

Der Hilbertraum ist also $\mathbb{C}^2$; sein Verband besteht aus Unterräumen der Dimension 0, 1, 2 die in einer orthonormalen Basis $\{e_1, e_2\}$ die Matrixdarstellungen haben:

$$0, \quad P(\hat{n}) = \frac{1}{2} (1 + \hat{n} \cdot \vec{\sigma}) \quad , \quad 1 \quad (e1)$$

$\vec{\sigma}$ sind die Pauli-Matrizen, und $\hat{n} \in S^2$ ist ein dreidimensionaler Einheitsvektor; wir haben alle komplexen 2x2 Projektoren parametrisiert. Die physikalische Interpretation der ja-nein-Messung $P(\hat{n})$ lautet: Spin in Richtung $\hat{n}$ polarisiert. Das Komplement ist $(1 - P(\hat{n})) = P(-\hat{n})$. Alle Observablen lassen sich nach dem Spektralsatz schreiben als reelle Kombination von orthogonalen Projektoren. Für (e1) bedeutet dies z.B. für den Hamiltonoperator die Form: $H = E_2 P(\hat{n}) + E_1 P(-\hat{n})$ mit der Matrix

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad \hat{n} = \hat{z}$$

Die Verbandsautomorphismen werden durch unitäre und antiunitäre Transformationen induziert. Für $U \in U(2)$ haben wir:

$$U P(\hat{n}) U^{-1} = P(R \hat{n}) \quad \text{mit} \quad R \in SO(3)$$

und für antiunitäre V :

$$V P(\hat{n}) V^{-1} = P(S \hat{n}) \quad \text{mit} \quad S \in O(3), \det S = -1$$

Die Automorphismengruppe des Verbandes ist also $O(3)$; Im entarteten Fall $E_1 = E_2$ ist $SO(3)$ eine Symmetrie der Dynamik, und V beinhaltet Zeitumkehr:

$$V e^{-\frac{i}{\hbar} H t} V^{-1} = e^{\frac{i}{\hbar} H t}$$

Für $E_1 \neq E_2$ ist nur eine Untergruppe $SO(2)$ Symmetrie, sowie $O(2)$ Transformationen mit Zeitumkehr.

Nun zum Fall $\mathbb{Q}^2$. Sei H der antihermitesche Generator der Evolution. Wir zerlegen $H = \gamma H$; die Basis in $\mathbb{Q}^2$ wählen wir so, daß H diagonal ist:

$$\begin{aligned} H e_1 &= e_1 E_1 \\ H e_2 &= e_2 E_2 \end{aligned} \quad 0 < E_1 \leq E_2 \quad (e2)$$

γ , das ja mit H vertauscht, ist ebenfalls diagonal, bzw. kann bei Entartung $E_1 = E_2$ zusätzlich diagonalisiert werden. Durch Wahl der $\mathbb{Q}$ -Phasen der Basis kann sogar erreicht werden: $\gamma e_i = e_i i_3$
Damit lautet die Matrixdarstellung γ und H , die von links auf die Komponenten x_i von $x = e_i x_i$ wirkt:

$$H \cong \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \quad \gamma \cong \begin{pmatrix} i_3 & 0 \\ 0 & i_3 \end{pmatrix} \quad (e3)$$

Falls H und damit $H^\dagger H$ und H einen Eigenwert $E_1 = 0$ besitzen, erhält man ähnlich:

$$H \cong \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix} \quad \gamma \cong \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i_3 \end{pmatrix}$$

$$(1 - \gamma \gamma^\dagger) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist der Projektor auf den Nullraum. Wir wollen im Folgenden alle Matrizen auf eine so gewählte Basis beziehen.}$$

In Analogie zu den Pauli-Matrizen wählen wir eine Basis für die (reelle) Algebra aller hermitescher 2×2 $\mathbb{Q}$ -Matrizen, die sechsdimensional ist:

$$\Sigma_0, \dots, \Sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i_1 \\ i_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i_2 \\ i_2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i_3 \\ i_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (e4)$$

$\Sigma_1, \dots, \Sigma_5$ erfüllen die Antivertauschungsbeziehungen:

$$\{\Sigma_a, \Sigma_b\} = 2 \delta_{ab} \quad a, b = 1, \dots, 5 \quad (e5)$$

Sie sind also eine ($\mathbb{Q}$ -hermitesche) Matrixdarstellung der Clifford-Algebra des fünfdimensionalen euklidischen Raumes, ebenso wie die $\vec{\sigma}$ zum $\mathbb{R}^3$. Die trivialen Projektoren in $\mathbb{Q}^2$ sind wieder 0 und $1 = \Sigma_0$, und mit Hilfe der Σ -Matrizen können wir leicht auch die eindimensionalen Projektoren parametrisieren. P ist hermitesch, daher: $P = P_\alpha \Sigma_\alpha$, $\alpha = 0, \dots, 5$, $P_\alpha \in \mathbb{R}$
 $\text{Tr} P = 1 \Rightarrow P_0 = \frac{1}{2}$, $P = \frac{1}{2} + P_\alpha \Sigma_\alpha$ $\alpha = 1, \dots, 5$
 $P^2 = (\frac{1}{2} + P_\alpha \Sigma_\alpha)^2 = \frac{1}{4} + P_\alpha \Sigma_\alpha + P_\alpha P_\alpha \stackrel{!}{=} P \Rightarrow P_\alpha = \frac{1}{2} \hat{N}_\alpha$, $\hat{N}_\alpha \hat{N}_\alpha = 1$
Somit lautet der allgemeine eindimensionale Projektor:

$$P(\hat{N}) = \frac{1}{2} (1 + N_\alpha \Sigma_\alpha) \quad , \quad N_\alpha \in S^4 \quad (e6)$$

$\hat{N}_a$ ist ein Einheitsvektor in 5 Dimensionen, und die $P(\hat{N})$ entsprechen eineindeutig den Punkten der vierdimensionalen Sphäre. Das suggeriert die "physikalische" Deutung als fünf- statt dreidimensionalem Polarisationsvektor. Welche dieser Propositionen sind kompatibel? Aus

$[P(\hat{N}), P(\hat{N}')] = 0$ folgt für eindimensionale Projektoren allgemein, daß sie gleich oder orthogonal sind. Beweis: wegen der Kompatibilität können wir $P(\hat{N})$, $P(\hat{N}')$ gleichzeitig diagonalisieren; sie haben dann auf der Diagonalen genau eine Eins und Nullen sonst. Die Einsen fallen zusammen, $P(\hat{N}) = P(\hat{N}')$, oder nicht; $P(\hat{N}) P(\hat{N}') = 0$. Der zu $P(\hat{N})$ orthogonale eindimensionale Unterraum ist in $\mathbb{Q}^2$ gerade das Komplement $(1 - P(\hat{N}))$ und somit als einziger mit $P(\hat{N})$ kompatibel. Bis auf die Dimension entspricht die Situation genau dem Spin; jeder eindimensionalen Proposition bzw. jedem reinen Zustand im Hilbertraum entspricht genau ein Polarisations-Einheitsvektor in fünf Dimensionen, wobei die Zustände zu antiparallelen Polarisierungen orthogonal sind. Alle (hermiteschen) Observablen haben also wieder die Form $\lambda_+ P(\hat{N}) + \lambda_- P(-\hat{N})$, $\lambda_{\pm} \in \mathbb{R}$, $\hat{N} \in S^4$. H aus (e3) lautet in unserer Hilbertraum- und Σ_a -Basis z.B.:

$$\begin{aligned} H &= E_2 P(\hat{M}_1) + E_1 P(-\hat{M}_1) \text{ mit } \hat{M}_1 = (1, 0, 0, 0, 0) \in S^4 \\ &= \frac{1}{2} (E_1 + E_2) + \frac{1}{2} (E_2 - E_1) \hat{M}_a \Sigma_a \end{aligned} \quad (\text{e6})$$

Die Automorphismengruppe des $\mathbb{Q}^2$ -Verbandes wird durch alle unitären Transformationen induziert, da wir gesehen hatten, daß die kunitären physikalisch immer einer unitären äquivalent sind. Die Lie-Algebra dieser Gruppe besteht aus den $\mathbb{Q}$ -antihermiteschen 2×2 Matrizen; eine Basis ist gegeben durch die zehn Matrizen:

$$\begin{aligned} \Sigma_{ab} &= \frac{1}{2} [\Sigma_a, \Sigma_b] \quad a \neq b = 1, \dots, 5 \\ &= \Sigma_a \Sigma_b \quad \text{für } a \neq b \end{aligned} \quad (\text{e7})$$

Sie sind klarerweise antihermitesch und von Null verschieden:

$$\Sigma_{ab} = 0 \Rightarrow \Sigma_{ab} \Sigma_b = 0 = \Sigma_a \quad \text{h}$$

Mit Hilfe der Beziehung

$$\text{Tr}(\Sigma_{ab}\Sigma_{cd}) = 2(-\delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc}) \quad (\text{e8})$$

sieht man auch leicht ihre lineare Unabhängigkeit über $\mathbb{R}$ ein:

Sei $\tau_{ab}\Sigma_{ab} = 0$, $\tau_{ab} \in \mathbb{R} \Rightarrow 0 = \text{Tr}(\tau_{ab}\Sigma_{ab}\Sigma_{cd}) = -4\tau_{cd}$

Die Spezielle antihermitesche Matrix $\mathcal{Y}$ lautet in dieser Basis $\mathcal{Y} = -\Sigma_{34}$ und $\mathbb{Q}$ -unitäre Matrizen besitzen die Exponentialdarstellung $U = e^{\frac{1}{4}\tau_{ab}\Sigma_{ab}}$.

Welche Transformationen werden nun auf den $P(\hat{N})$ bzw. der S^4 -Sphäre, die sie parametrisiert, induziert? Wir lesen das an infinitesimalen Transformationen ab:

$$U = 1 + \frac{1}{4}\varepsilon_{ab}\Sigma_{ab}, \quad \varepsilon_{ab} = -\varepsilon_{ba}$$

$$P(\hat{N}) \rightarrow U P(\hat{N}) U^{-1} \cong \frac{1}{2} \left(1 + \hat{N}_c \left(\Sigma_c + \left[\frac{1}{4}\varepsilon_{ab}\Sigma_{ab}, \Sigma_c \right] \right) \right)$$

Die Auswertung des Kommutators ergibt:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2}[\Sigma_a, \Sigma_b], \Sigma_c \right] &= \Sigma_a \{ \Sigma_b, \Sigma_c \} - \Sigma_b \{ \Sigma_a, \Sigma_c \} \\ &= 2(\delta_{bc}\Sigma_a - \delta_{ac}\Sigma_b) \end{aligned} \quad (\text{e9})$$

so daß die Transformation lautet:

$$\begin{aligned} P(\hat{N}) &\rightarrow \frac{1}{2} \left(1 + (\delta_{ab} + \varepsilon_{ab}) \hat{N}_b \Sigma_a \right) = P(\hat{N}') \\ \hat{N}'_a &= N_a + \varepsilon_{ab} N_b \end{aligned} \quad (\text{e10})$$

$\hat{N}$ transformiert sich mit einer infinitesimalen $SO(5)$ Transformation, und die zehn Parameter ε_{ab} sind die Drehwinkel in den $\binom{5}{2} = 10$ Ebenen des 5-dimensionalen Raumes. (Nur im $\mathbb{R}^3$, wo Vektoren und Ebenen dual zueinander sind, sind infinitesimale Drehungen durch Achsen zu beschreiben, allgemein aber durch Ebenen). Wir haben den Homomorphismus von der 2-dimensionalen $\mathbb{Q}$ -unitären Gruppe auf die $SO(5)$ gefunden, eine Verallgemeinerung des Zusammenhanges von $SU(2)$ und $SO(3)$:

$$U \Sigma_a U^{-1} = R_{ab} \Sigma_b, \quad R_{ab} \in SO(5) \quad (\text{e11})$$

Die Abbildung ist zwei zu eins, und wie gewohnt gehört zu 2π -Drehungen, etwa in der 1-2 Ebene, $U = e^{\frac{1}{2} 2\pi \Sigma_{12}} = \cos \pi + \Sigma_{12} \sin \pi = -1$ weil $(\Sigma_{12})^2 = -1$. Der gruppentheoretische Zusammenhang ist bekannt, nur unter anderem Namen; faßt man den 2-dimensionalen $H_{\mathbb{Q}}$ als 4-dimensionalen $H_{\mathbb{C}}$ auf wie in Anhang E beschrieben, dann gehen $\mathbb{Q}$ -unitäre Matrizen über in $\mathbb{C}$ -unitär symplektische, und deren Gruppe heißt $Sp(2)$. Der Homomorphismus besteht also auch von der isomorphen $Sp(2)$ auf $SO(5)$ [27]. Ein Analogon zu antiunitären Transformationen gibt es nicht, da ja alle Automorphismen linear induziert werden, und uneigentliche Drehungen werden nicht erreicht. Beweis:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3 \Sigma_4 \Sigma_5 &= 1 \\ \det(R_{ab}) &= \frac{1}{2} \text{Tr}(R_{1a} \Sigma_a R_{2b} \Sigma_b \dots R_{5c} \Sigma_c) = \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr}(U \Sigma_1 U^{-1} \dots U \Sigma_5 U^{-1}) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\Sigma_1 \dots \Sigma_5) = 1 \end{aligned}$$

In diesem Modell ist nun $\mathcal{Y} = -\Sigma_{34}$, der " $\hat{L}$ -Ersatz", ein nichttrivialer Generator dieser Gruppe. Damit sind selbst im entarteten Fall $E_1 = E_2 = E$, $H = E \cdot 1$ gewisse Propositionen zeitabhängig. Angenommen, wir präparieren unser Spinsystem durch Polarisierung in 3-Richtung, wozu dann $P(\hat{M}_3)$ mit $\hat{M}_3 = (0, 0, 1, 0, 0)$ als Dichtematrix gehört. Dieser Zustand hat dann wie alle anderen Polarisierungen Energie E :

$$H P(\hat{M}_3) = E P(\hat{M}_3)$$

Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit nach der Zeit t noch immer 3-Polarisation zu finden:

$$W(t) = \text{Tr}(P(\hat{M}_3) U_t P(\hat{M}_3) U_t^{-1}), \quad U_t = e^{-t\mathcal{Y}H}$$

Das Resultat lautet:

$$W(t) = \frac{1}{2} (1 + \cos 2Et)$$

Wie zu erwarten induziert $\mathcal{Y}$ "Bewegung" trotz Energieentartung. Im nichtentarteten Fall $E_1 \neq E_2$ ist $H = \frac{1}{2}(E_1 + E_2) + \frac{1}{2}(E_2 - E_1)\Sigma_1 = E + E'\Sigma_1$ und $-\mathcal{Y}H = E\Sigma_{34} - E'\Sigma_{25}$, denn $\Sigma_{34}\Sigma_1 = -\Sigma_{25}$.

Es findet eine kombinierte Drehung in den 3-4 und 2-5 Ebenen statt, deren Generatoren kommutieren:

$$[\Sigma_{25}, \Sigma_{34}] = 0 \quad U_t = e^{t(E\Sigma_{34} - E'\Sigma_{25})} = e^{tE\Sigma_{34}} e^{-tE'\Sigma_{25}}$$

Wir sehen uns nicht in der Lage, dieses explizite Modell physikalisch zu interpretieren. Wenn man von Hand als physikalisch realisierbar nur noch solche Polarisationsvektoren zuläßt, die in $\mathbb{R}^5$ senkrecht auf der 3-4-Ebene stehen, dann vertauschen diese physikalischen Propositionen alle mit $\mathcal{J}$, so daß wieder die $\mathcal{J}$ -Superauswahlregel in Kraft tritt. In diesem Fall würde sich das System auf den gewöhnlichen Spin in $\mathbb{C}^2$ reduzieren mit der Untergruppe $SO(3)$ von Drehungen zwischen den Richtungen 1,2 und 5.

f) Zusammenfassung

Wir haben gesehen, wie man ohne weiteres auch über dem nichtkommutativen Körper der Quaternionen einen Hilbertraum mit positivem Skalarprodukt definieren kann. Ausgehend von der abstrakten verbandstheoretischen Charakterisierung der Quantentheorie konnten wir dann angeben, wie die Realisierung von Quantensystemen in einem solchen Raum im Prinzip aussieht. Ein markanter Unterschied gegenüber der normalen komplexen Realisierung besteht darin, daß hermitesche Operatoren, Observable, und antihermitesche, Generatoren, einander nicht mehr im Verhältnis eins zu eins entsprechen durch einen Faktor $\pm i$. Für den Generator der Evolution H haben wir dennoch eine Faktorisierung $\mathcal{J}H$ gefunden, wo H hermitesch positiv und $\mathcal{J}$ im wesentlichen antihermitesch unitär ist, also eine Verallgemeinerung des i darstellt. Wir haben diesen Faktor H , der mit $\mathcal{J}$ kommutiert, als Energie zu interpretieren versucht. Wenn nun, wie im Fall der aus den Poincaré-Generatoren abgeleiteten Observablen, alle physikalischen Observablen mit $\mathcal{J}$ vertauschen, dann ist $\mathcal{J}$ ein antihermitescher Superauswahloperator, und die zugehörige Superauswahlregel schränkt Zustandsraum und Zahlensystem auf einen $\mathbb{R}$ -Hilbertraum ein, wobei $\mathcal{J}$ in i übergeht. Als Beispiel einer Theorie, wo dies nicht passiert, haben wir die eindeutige Quantentheorie des zweidimensionalen $\mathbb{Q}$ -Hilbertraumes konstruiert. Es ergaben sich interessante Gruppenstrukturen - eine Art Spin in fünf Raumdimensionen -, doch dieses Modell zeigt, daß gerade die nichttrivialen Eigenschaften von $\mathcal{J}$, wenn nicht mit $\mathcal{J}$ kommutierende Observable als physikalisch angesehen werden, physikalisch schwer verwertbar sind.

Anhang A: Ableitung der Feldgleichungen durch Variation von $\mathcal{L}_Q$.

Man gelangt am schnellsten durch direkte Variation der Lagrange dichte

$$\mathcal{L}_Q = \frac{1}{4e^2} K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} - \frac{1}{2\ell^2} D_\mu \eta D^\mu \eta + \frac{\lambda}{2} (\eta^2 + 1) \quad (\text{A1})$$

zu den Feldgleichungen. Der Zusatzterm $\sim \lambda(x)$ gegenüber (Id3) berücksichtigt die Nebenbedingung $\eta^2 + 1 = 0$, wobei $\lambda(x)$ ein reeller Lagrange-multiplikator ist. Wir benötigen folgende Beziehungen:

$$\text{Re}(q_1 q_2) = \text{Re}(q_2 q_1) \quad (\text{Spureigenschaft}) \quad (\text{A2})$$

$$\text{Re} D_\mu q = D_\mu \text{Re} q \quad (\text{A3})$$

$$D_\mu (q_1 q_2) = q_1 (D_\mu q_2) + (D_\mu q_1) q_2 \quad (\text{A4})$$

Für beliebige Variationen $\delta\eta = -\delta\eta^*$ folgt aus

$$0 = \text{Re}(\delta\eta q) = \text{Re}(\delta\eta \text{Im} q) = \frac{1}{2} \{\delta\eta, \text{Im} q\}$$

$$\text{daß } \text{Im} q = \frac{1}{2} (q - q^*) = 0 \quad (\text{A5})$$

Variation nach $\delta\lambda$, reell

$$\eta^2 + 1 = 0 \quad (\text{A6})$$

Variation nach $\delta\eta = -\delta\eta^*$

$$\delta\mathcal{L}_Q = \text{Re} \delta\mathcal{L}_Q = \text{Re} \left[-\frac{1}{2\ell^2} (D_\mu \eta D^\mu \delta\eta + D_\mu \delta\eta D^\mu \eta) + \frac{\lambda}{2} (\eta \delta\eta + \delta\eta \eta) \right]$$

$$\stackrel{(\text{A2})}{=} -\frac{1}{\ell^2} \text{Re} (D^\mu \eta D_\mu \delta\eta) + \lambda \text{Re} [\eta \delta\eta]$$

$$\stackrel{(\text{A4})}{=} -\frac{1}{\ell^2} \text{Re} [D^\mu (\eta D_\mu \delta\eta) - (D^\mu D_\mu \eta) \delta\eta] + \lambda \text{Re} [\eta \delta\eta]$$

$$\stackrel{(\text{A3})}{=} -\frac{1}{\ell^2} \partial_\mu \text{Re} (D_\mu \eta \delta\eta) + \frac{1}{\ell^2} \text{Re} [(D_\mu D^\mu \eta) \delta\eta] + \lambda \text{Re} [\eta \delta\eta]$$

Der Divergenzterm trägt nicht zur Variation des Wirkungsintegrals bei und die Bewegungsgleichung lautet mit (A5):

$$0 = \text{Im} \left[\frac{1}{e^2} D^2 \eta + \lambda \eta \right]$$

oder, da bei Terme rein imaginär sind,

$$D^2 \eta + e^2 \lambda \eta = 0 \quad (\text{A7})$$

Indem man die ganze Gleichung mit η kommutiert, folgt:

$$[\eta, D^2 \eta] = 0 \quad (\text{A8})$$

Ist diese "Integrabilitätsbedingung" erfüllt, dann läßt sich der Multiplikator λ aus (A7) bestimmen. (A8) kann man auch schreiben:

$$0 = D_\mu (\eta \overleftrightarrow{D}^\mu \eta) \quad \text{mit} \quad (\text{A9})$$

$$\eta \overleftrightarrow{D}^\mu \eta = \eta (D^\mu \eta) - (D^\mu \eta) \eta,$$

also als eine Art kovariante Stromerhaltung.

Unter Verwendung von (A6) gilt:

$$0 = D_\mu \eta^2 = \eta D_\mu \eta + (D_\mu \eta) \eta = \{\eta, D_\mu \eta\} \quad (\text{A10})$$

und daher $\eta \overleftrightarrow{D}^\mu \eta = 2 \eta D^\mu \eta$ und genauso mit ∂^μ statt D^μ .

Variation nach $\delta C_\mu = -\delta C_\mu^*$

$$\begin{aligned} \delta K_{\mu\nu} &= \partial_\mu \delta C_\nu - \partial_\nu \delta C_\mu + \frac{1}{2} [C_\mu, \delta C_\nu] + \frac{1}{2} [\delta C_\mu, C_\nu] \\ &= D_\mu \delta C_\nu - D_\nu \delta C_\mu \end{aligned}$$

$$\delta D_\mu \eta = \frac{1}{2} [\delta C_\mu, \eta]$$

$$\delta \mathcal{L}_Q = \text{Re} \delta \mathcal{L}_Q^{(\text{R2})}$$

$$\text{Re} \left[\frac{1}{e^2} K_{\mu\nu} D^\mu \delta C^\nu - \frac{1}{2e^2} D^\mu \eta [\delta C_\mu, \eta] \right]$$

$$\stackrel{(A4)}{=} \stackrel{(A5)}{=} \text{Divergenz} + \text{Re} \left[-\frac{1}{e^2} (D^\mu K_{\mu\nu}) \delta C^\nu - \frac{1}{2e^2} (\eta \overleftrightarrow{D}^\nu \eta) \delta C^\nu \right]$$

$$\stackrel{(A5)}{\Rightarrow} \text{Im} \left(-\frac{1}{e^2} D^\mu K_{\mu\nu} - \frac{1}{2e^2} \eta \overleftrightarrow{D}^\nu \eta \right) = 0 \quad \text{oder}$$

$$D^\mu K_{\mu\nu} + \frac{e^2}{2e^2} \eta \overleftrightarrow{D}^\nu \eta = 0 \quad (A11)$$

Darüber hinaus gilt für $K_{\mu\nu}$ die Identität :

$$\varepsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} D^\nu K^{\kappa\lambda} = 0 \quad (A12)$$

Beweis:

Wir betrachten für ein beliebiges $\mathbb{Q}$ -Feld $\psi(x)$:

$$\begin{aligned} R_\mu &= 2 \varepsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} D^\nu D^\kappa D^\lambda \psi = \varepsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} D^\nu [D^\kappa, D^\lambda] \psi \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} D^\nu [K^{\kappa\lambda}, \psi] \quad \text{wegen der Definition der Krümmung.} \end{aligned}$$

Mit (A4):

$$R_\mu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} ([D^\nu K^{\kappa\lambda}, \psi] + [K^{\kappa\lambda}, D^\nu \psi])$$

andererseits gilt auch:

$$\begin{aligned} R_\mu &= \varepsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} [D^\nu, D^\kappa] D^\lambda \psi = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} [K^{\nu\kappa}, D^\lambda \psi] \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} [K^{\kappa\lambda}, D^\nu \psi] \quad \text{durch zyklische Permutation.} \end{aligned}$$

Durch Gleichsetzen finden wir:

$$0 = \varepsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} [D^\nu K^{\kappa\lambda}, \psi]$$

Das gilt für alle $\psi \in \mathbb{Q}$, und da $D^\nu K^{\kappa\lambda}$ rein imaginär ist, folgt (A12).

Anhang B: Spektralzerlegung [11]

Die Spektralzerlegung ist der mathematische Ausdruck der physikalischen Behauptung, daß in quantenmechanischen Systemen die Messungen von Propositionen im Prinzip eine Basis für allgemeine Messungen bilden. Denken wir uns eine (hermitesche) Observable X gegeben, zunächst entweder im endlichdimensionalen Raum oder mit rein diskretem Spektrum. Dann kann man X schreiben:

$$X = \sum_{\alpha} x_{\alpha} P_{\alpha} \quad (B1)$$

Hier sind x_{α} die reellen Eigenwerte und P_{α} die Projektoren auf die zugehörigen orthogonalen Eigenräume, die je nach Entartung ein- oder mehrdimensional sind:

$$P_{\alpha}^{\dagger} = P_{\alpha} = P_{\alpha}^2 \quad P_{\alpha} P_{\beta} = 0 \text{ für } \alpha \neq \beta \quad (B2)$$

Für Matrixelemente gilt:

$$\langle a | X | b \rangle = \sum_{\alpha} x_{\alpha} \langle a | P_{\alpha} | b \rangle \quad (B3)$$

In dieser Form ist die Zerlegung auch für kontinuierliche Spektren verallgemeinerungsfähig. Habe also X nun etwa das Spektrum $(-\infty, \infty)$, z.B. ein Ortsoperator der QM. Dann kann man [11] eine Form finden:

$$X = \int_{-\infty}^{\infty} x \, dE_x \quad (B4)$$

wo dE_x im wesentlichen auf den Eigenraum zum Intervall $(x, x+dx)$ im Spektrum projiziert.

Genauer heißt (B4): Es gibt eine Familie von Projektoren E_x auf den Eigenraum zum Intervall $(-\infty, x)$, womit für beliebige Vektoren

$|a\rangle, |b\rangle$ $\langle a | E_x | b \rangle$ eine Funktion von x ist und gilt:

$$\langle a | X | b \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \, d \langle a | E_x | b \rangle \quad (B5)$$

Ein Beispiel ist die Schrödingerdarstellung mit dem Hilbertraum $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ der quadratintegrablen Funktionen $\psi(y)$. Der Projektor zum Intervall Δ im Spektrum ist:

$$(E_{\Delta} \psi)(y) = \begin{cases} \psi(y) & \text{für } y \in \Delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{B6})$$

und damit:

$$(E_x \psi)(y) = (E_{(-\infty, x)} \psi)(y) = \Theta(x-y) \psi(y) \quad (\text{B7})$$

$$\langle a | E_x | b \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dy \psi_a^*(y) (E_x \psi_b)(y) = \int_{-\infty}^x dy \psi_a^*(y) \psi_b(y) \quad (\text{B8})$$

$$\begin{aligned} \langle a | x | b \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x \, d \left(\int_{-\infty}^x dy \psi_a^*(y) \psi_b(y) \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \, \psi_a^*(x) \psi_b(x) dx \end{aligned} \quad (\text{B9})$$

Also bilden die E_x die Spektralfamilie zum Multiplikationsoperator x . Man kann damit die Messung von X durch die Messung von E_{Δ_i} mit feinen Intervallen Δ_i approximieren.

Anhang C: Pfadintegraldarstellung für den Evolutionsoperator [13,14]

Aus den Bewegungsgleichungen im klassischen Fall (IIe3) und in der quantisierten Theorie (IIe12) folgt die infinitesimale Zeitentwicklung der fundamentalen Observablen (zur Notation siehe IIe):

$$\begin{aligned} x^i(t+\varepsilon) &\equiv x^i(t) + \varepsilon [x^i, H(x,t)]_{\text{P.K.}} = \left(1 - \varepsilon \frac{\partial H}{\partial x^k} \Theta^{ke} \frac{\partial}{\partial x^e}\right) x^i(t) \\ &= D_{t+\varepsilon, t} (x^i(t)) \end{aligned} \quad (\text{C1})$$

$$\begin{aligned} \hat{x}^i(t+\varepsilon) &\equiv \hat{x}^i(t) - \frac{i\varepsilon}{\hbar} [\hat{x}^i, H(\hat{x}, t)] = \left(1 + \frac{i\varepsilon}{\hbar} H\right) \hat{x}^i \left(1 - \frac{i\varepsilon}{\hbar} H\right) \\ &= U_{t+\varepsilon, t}^{-1} \hat{x}^i(t) U_{t+\varepsilon, t} \end{aligned} \quad (\text{C2})$$

Obwohl beide Bewegungen durch das Lie-Produkt definiert sind, gehen die Algebren auseinander, wenn die Darstellungen im einen Fall durch Differentialoperatoren und im anderen durch das antisymmetrisierte Operatorprodukt eingesetzt werden. Rein algebraisch ist U verglichen mit D eine Art "Quadratwurzel", die die Darstellung durch das Operatorprodukt zu ziehen erlaubte. Durch Iteration können wir den Evolutionsoperator für endliche Zeiten wegen der Gruppeneigenschaft der dynamischen Gruppe konstruieren:

$$\begin{aligned} U_{t_2, t_1} &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty \\ N\varepsilon = t_2 - t_1}} U_{t_2, t_2-\varepsilon} U_{t_2-\varepsilon, t_2-2\varepsilon} \dots U_{t_1+\varepsilon, t_1} \\ &= \lim \left(1 - \frac{i\varepsilon}{\hbar} H(\hat{x}, t_2-\varepsilon)\right) \left(1 - \frac{i\varepsilon}{\hbar} H(\hat{x}, t_2-2\varepsilon)\right) \dots \left(1 - \frac{i\varepsilon}{\hbar} H(\hat{x}, t_1)\right) \\ &= \lim_{t_2} 1 - \frac{i\varepsilon}{\hbar} \sum_{a=1}^{N-1} H(\hat{x}, t_1+a\varepsilon) + \left(\frac{i\varepsilon}{\hbar}\right)^2 \sum_{\substack{a=1 \\ \tau_a > \tau_b = 1}}^{N-1} H(\hat{x}, t_1+a\varepsilon) H(\hat{x}, t_1+b\varepsilon) + \dots \\ &= 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} d\tau_a H(\hat{x}, \tau_a) + \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_1}^{t_2} d\tau_a \int_{t_1}^{\tau_a} d\tau_b H(\hat{x}, \tau_a) H(\hat{x}, \tau_b) + \dots \\ &= T \exp \left\{ \frac{-i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} d\tau H(\hat{x}, \tau) \right\} \end{aligned} \quad (\text{C3})$$

Das ist der bekannte Ausdruck durch das zeitgeordnete Exponential oder Produktintegral. Genauso kann man formal im klassischen Fall vorgehen und für D_{t_2, t_1} schreiben:

$$D_{t_2, t_1} = T \exp \left\{ \int_{t_1}^{t_2} d\tau \frac{\partial H}{\partial x^k}(x, \tau) \theta^{ke} \frac{\partial}{\partial x^e} \right\} \quad (C4)$$

Für zeitunabhängige Hamiltonoperatoren entfällt der T -Ordnungs-Operator und aus $\int_{t_1}^{t_2} d\tau$ wird der Faktor $t_2 - t_1$, also die gewöhnliche Exponentialform.

Wir betrachten nun für den quantisierten Fall die Faktoren in (C3) vor der Ausmultiplikation speziell im Schrödingerbild:

$$\left(1 - \frac{i\varepsilon}{\hbar} H(q, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q}, t) \right) = U_{t+\varepsilon, t}$$

Diesen Operator können wir auch als Integralkern darstellen:

$$(U_{t+\varepsilon, t} \psi)(q'') = \int dq' K(t+\varepsilon, t; q'', q') \psi(q')$$

mit

$$K(t+\varepsilon, t; q'', q') \cong \int \frac{d^n k}{(2\pi\hbar)^n} e^{\frac{i}{\hbar} \left\{ k \cdot (q'' - q') - \varepsilon H\left(\frac{q'' + q'}{2}, k, t\right) \right\}} \quad (C5)$$

In dieser Darstellung multiplizieren sich die infinitesimalen Operatoren:

$$\begin{aligned} U_{t+2\varepsilon, t+\varepsilon} U_{t+\varepsilon, t} &\rightarrow \int d^n q K(t+2\varepsilon, t+\varepsilon; q'', q) K(t+\varepsilon, t; q, q') = \\ &= \int \frac{d^n k_2}{(2\pi\hbar)^n} d^n q \frac{d^n k_1}{(2\pi\hbar)^n} e^{\frac{i\varepsilon}{\hbar} \left\{ k_2 \cdot \frac{q'' - q}{\varepsilon} + k_1 \cdot \frac{q - q'}{\varepsilon} - H\left(\frac{q'' + q}{2}, k_2, t+\varepsilon\right) - H\left(\frac{q + q'}{2}, k_1, t\right) \right\}} \end{aligned}$$

und damit lautet die endliche Form:

$$\begin{aligned} U_{t_2, t_1} &\rightarrow K(t_2, t_1; q'', q') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^n k_1 d^n q_1}{(2\pi\hbar)^n} \dots \frac{d^n k_{N-1} d^n q_{N-1}}{(2\pi\hbar)^n} \frac{d^n k_N}{(2\pi\hbar)^n} e^{\frac{i\varepsilon}{\hbar} \left\{ \sum_{a=1}^N k_a \cdot (q_a - q_{a-1}) - H\left(\frac{q_a + q_{a-1}}{2}, k_a, t+a\varepsilon\right) \right\}} \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int Dq(t) Dk(t) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} (k \cdot \dot{q} - H(q(t), k(t), \tau))} \\ &\quad q(t_1) = q' = q_0 \quad q(t_2) = q'' = q_N \end{aligned} \quad (C6)$$

Man betrachtet also die immer zahlreicheren Zwischenintegrationen im Limes als Funktionalintegration über alle klassischen Bahnen im Phasenraum. Die Argumente q' und q'' gehen als Randwerte für die Funktionen $q(t)$ in die Integration ein. Die symbolische Schreibweise $\int Dq(t) Dk(t)$ für den Grenzfall $N \rightarrow \infty$ des $(2N-1)$ -fachen Integrals ist zu sehen in Analogie zur Definition des Riemann-Integrals als Grenzwert Riemannscher Summen. (C6) ist anschaulich interpretierbar: Die quantenmechanische Bewegung des Systems kommt zustande durch eine kohärente Überlagerung aller klassischen Bahnen, die die Randbedingungen erfüllen; die Amplitude für jede Bahn ist vom Betrag 1 und die Phase ist der Wert des klassischen Wirkungsfunktional in Einheiten von $\hbar$. Der fundamentale Skalar $\frac{1}{\hbar}$, der bei der kanonischen Quantisierung die Identifizierung der fundamentalen Lie-Produkte erlaubte, ermöglicht hier also gerade die Konstruktion der komplexen Quantenamplitude aus dem klassischen Wirkungsfunktional. Die Bahn, die die klassische Bewegungsgleichung auswählt, ist der stationäre Phasenpunkt des Integranden, der in einer Situation, wo $\hbar$ als sehr klein gegen die klassische Wirkung angesehen werden kann, den Hauptbeitrag ergibt.

Obwohl man in einem mathematisch strengen Sinn nur Integrale von Gauß'scher Form auswerten kann, basieren derzeit die meisten Entwicklungen in der Quantenfeldtheorie auf dieser Formulierung der Quantisierung. Das liegt daran, daß sie eine sehr flexible Handhabung von Störungsreihen und semiklassischen Entwicklungen gestattet.

Anhang D: Quanten-Phaseneichinvarianz in der Feldtheorie.

In der Einteilchen-Quantenmechanik haben wir festgestellt, daß die Eichtransformationen genau die Hilbertraum-Phase der Wellenfunktion betreffen. Es ergab sich das geometrische Bild einer lokal an die Raumzeit angehefteten komplexen Ebene, in der die Werte der Wellenfunktion liegen, und das Eichfeld beschreibt den Zusammenhang zwischen den verschiedenen lokalen Ebenen. In der Feldtheorie spielten sich die Eichtransformationen dagegen grob gesagt im Argument des Wellenfunktional ab, und die Phase war nicht direkt beteiligt. Um den Unterschied noch deutlicher herauszustellen, wollen wir zeigen, wie ungewöhnlich das Analogon der Einteilchen-Eichinvarianz in der Feldtheorie aussehen würde.

Wir übernehmen aus IV die Feld-Schrödingergleichung für ein reelles Skalarfeld

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2} \int d^3x \frac{\delta^2 \Psi}{\delta \varphi(\vec{x}) \delta \varphi(\vec{x})} + V[\varphi] \Psi \quad (D1)$$

wobei $\Psi = \Psi[\varphi(\vec{x}), t]$ das Zustandsfunktional ist. $e^{i\alpha} \Psi$ repräsentiert den gleichen Zustand wie Ψ . In der Quantenmechanik gelangt man zur Eichinvarianz, wenn man α von den Ortsvariablen abhängen läßt, die dort im Ψ -Argument stehen. Lassen wir hier α von den verallgemeinerten Ortskoordinaten $\varphi(\vec{x})$ abhängen, so gelangen wir zu der "Eichtransformation":

$$\Psi[\varphi(\vec{x}), t] \rightarrow e^{i\alpha[\varphi(\vec{x})]} \Psi[\varphi(\vec{x}), t] \quad (D2)$$

wobei der Einfachheit halber von einer Zeitabhängigkeit von α abgesehen sei. $\frac{\partial}{\partial t}$ und der Multiplikations-Operator $V[\varphi]$ vertauschen mit der Phase, aber die Funktionalableitung muß durch eine "kovariante Funktionalableitung" ersetzt werden:

$$\frac{\delta}{\delta \varphi(\vec{x})} \rightarrow \frac{\delta}{\delta \varphi(\vec{x})} + i A[\varphi(\vec{x}), \vec{x}] = \frac{D}{D\varphi(\vec{x})} \quad (D3)$$

Vergleichen wir mit $\frac{\partial}{\partial q_r} + i A_r(q_s)$, dann entspricht das Argument $\varphi(\vec{x})$ den q_s und das $\vec{x}$ dem r , so daß es für jeden Freiheitsgrad eine Komponente des Eichfeldes gibt. Mit der $\frac{D}{D\varphi(\vec{x})}$ -Ableitung in der

Schrödingergleichung haben wir nun Invarianz unter (D2) kombiniert mit:

$$A[\psi(\vec{r}), \vec{x}] \rightarrow A[\psi(\vec{r}), \vec{x}] - \frac{\delta \alpha[\psi(\vec{r})]}{\delta \psi(\vec{x})} \quad (D4)$$

Klarerweise hat das nichts mit der üblichen Eichinvarianz der Feldtheorie zu tun. Das "Superpotential" A , das hier wiederum als äußeres Feld auftritt, besitzt eine gegenüber der Feldtheorie nochmals erweiterte Struktur von Freiheitsgraden: sie werden durch den Vektor $\vec{x}$ und Funktionen $\psi(\vec{r})$ aufgezählt. Um es zu quantisieren, müßte man konsequenterweise Funktionale von Funktionalen einführen und gelangte so zu einer wohl höchst unphysikalischen Ausuferung der Freiheitsgrade.

Anhang E: Symplektische Zerlegung und No-Go-Theoreme in $H_{\mathbb{Q}}$.

Wir werden zeigen, daß sich aus der Existenz einer Lie-Algebra, dargestellt durch antihermitesche Operatoren in $H_{\mathbb{Q}}$, die die Poincaré-Algebra in nichttrivialer Weise enthält, eine ebensolche Darstellung in einem gewissen komplexen Hilbertraum konstruieren läßt. Damit sind bestehende No-Go-Theoreme, z.B. [25,26], auch für mögliche Quaternionen-Realisierungen relevant. Man sollte allerdings bedenken, daß alle No-Go-Theoreme nicht einfach die Existenz einer solchen Algebra verneinen, sondern stets noch physikalisch motivierte Voraussetzungen z.B. über das Einteilchenspektrum benötigen. Solche Spektraleigenschaften folgen aber wahrscheinlich für die abgeleitete komplexe Darstellung, wenn sie in der ursprünglichen Realisierung vorlagen.

Der Beweis beruht auf der Tatsache, daß sich $H_{\mathbb{Q}}$ eineindeutig auf einen komplexen Raum der doppelten Dimension abbilden läßt. Die Menge aller Vektoren in $H_{\mathbb{Q}}$ bilden eine additive Gruppe; wir wählen eine Einbettung $\mathbb{C}_{\eta}$ der $\mathbb{C}$ -Zahlen durch ein imaginäres Einheitsquaternion η . Die Skalarmultiplikation mit diesem Unterkörper von $\mathbb{Q}$ ist definiert, und $H_{\mathbb{Q}}$ bildet so über $\mathbb{C}_{\eta}$ gleichzeitig einen komplexen Vektorraum. Aus dem Skalarprodukt in $H_{\mathbb{Q}}$ leiten wir ein Skalarprodukt mit Werten in $\mathbb{C}_{\eta}$ ab:

$$(x, y)_{\eta} = \frac{1}{2} [(x, y) - \eta (x, y) \eta] \in \mathbb{C}_{\eta} \quad (E1)$$

$(x, y)_{\eta}$ projiziert den zu η senkrechten Anteil aus (x, y) heraus und kommutiert daher mit η :

$\eta (x, y)_{\eta} = \frac{1}{2} [\eta (x, y) + (x, y) \eta] = \frac{1}{2} [-\eta (x, y) \eta + (x, y)] \eta = (x, y)_{\eta} \eta$
 Aus den Eigenschaften des Original-Skalarproduktes folgt, daß $H_{\mathbb{Q}}$ mit dem Produkt $(x, y)_{\eta}$ nun einen komplexen Hilbertraum bildet, allerdings von der doppelten Dimension. Sei nämlich $\{e_i\}$ eine Basis in $H_{\mathbb{Q}}$; ein allgemeiner Vektor x läßt sich entwickeln: $x = e_i x_i$ mit Komponenten $x_i \in \mathbb{Q}$. Die x_i schreiben wir mit Hilfe der symplektischen Zerlegung von $\mathbb{Q}$ selbst (Ib14):

$$x_i = a_i + v b_i \quad a_i, b_i \in \mathbb{C}_{\eta}, \{v, \eta\} = 0, v^2 = -1 \quad (E2)$$

x läßt sich dann mit komplexen Koeffizienten a_i, b_i in der Basis $\{e_i, e_i v\}$ entwickeln:

$$x = e_i a_i + e_i v b_i \quad (E3)$$

Man zeigt leicht, daß dies auch ein minimaler Satz von Basisvektoren ist.

Nach diesen Vorbereitungen betrachten wir Operatoren, die H_Q auf sich abbilden. Wir können sie als Operatoren im komplexen Hilbertraum auffassen; trivialerweise sind Q -lineare Operatoren auch C_η -linear, aber die Umkehrung gilt nicht, so daß man nicht alle komplexen linearen Operatoren erreicht. Weiter fallen die Begriffe hermitesch konjugiert und unitär zusammen; ist etwa $A = -A^\dagger$ im Q -Sinn, dann folgt aus (D1) auch:

$$\begin{aligned} (x, A^\dagger y)_\eta &= (Ax, y)_\eta = \frac{1}{2} [(Ax, y) - \eta (Ax, y)\eta] = \\ &= \frac{1}{2} [-(x, Ay) + \eta (x, Ay)\eta] = -(x, Ay)_\eta \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung gezeigt und der Kontakt mit üblichen No-Go-Theoremen hergestellt.

Hier noch ein Wort der Warnung. Man könnte den Eindruck gewinnen, daß sich mit dieser universellen Konstruktion die ganze Q -Theorie auf eine komplexe Theorie zurückführen ließe. Das ist nur soweit wahr, wie man auch die komplexe Theorie in einer gewählten Basis über Real- und Imaginärteil der Komponenten in eine reelle umwandeln kann von doppelter (reeller) Dimension. Das ist aber unpraktisch und unnatürlich solange echt komplexe Strukturen wie Faktoren i oder $U(1)$ -Strahlen eine Rolle spielen. Wir untersuchen die Möglichkeit einer Quantentheorie mit echten Quaternionen-Strukturen, z.B. $SU(2) \cong Q$ mächtigen Strahlen als reinen Zuständen, die im komplexen Bild zweidimensional wären; wenn es eine solche Theorie gibt, ist die Quaternionenbeschreibung die natürliche. Die η -Superauswahlregel in (Vc) besagte gerade, daß es dort keine Q -Strukturen gab; die daraus resultierende Reduktion auf einen komplexen Formalismus war eine andere als die hier beschriebene, die immer möglich ist. Man vergleiche in (Vc) das Analogon für den Übergang von komplex nach reell, das sich ebenfalls von der einfachen Parametrisierung durch Real- und Imaginärteil unterscheidet.

VI. Schlußfolgerungen

Wir haben die in der Einleitung aufgeworfenen Fragen von zwei Seiten her angegangen: durch Analyse der Quantentheorien speziell mit Eichinvarianz in der üblichen Form und durch eine mehr abstrakte Untersuchung der unkonventionellen Quaternionen-Quantenmechanik.

In der Einteilchen-Quantentheorie mit äußerem Feld sieht es zunächst selbst in der relativistischen Variante (Dirac-Gleichung) ganz so aus, als seien die "Quantenphasen" genau die "Eichphasen", so daß auf diesem Niveau beide simultan verallgemeinerungsfähig wären, was allerdings zu einem äußeren klassischen Yang-Mills-Feld führen würde, einer anscheinend unphysikalischen Situation. In der Quantenfeldtheorie stellte sich der Zusammenhang zwischen beiden Sorten von Phasen als sehr viel subtiler heraus; er besteht eigentlich nur über die Ladungs-Superauswahlregel der Vielteilchentheorie. Dies ist jedoch kein lokaler Zusammenhang. Man sieht dies gut, wenn man Zustände des Quantenfeldes konkret als komplexe Wellenfunktionale betrachtet; sie hängen als Funktional und nicht lokal wie in der Einteilchentheorie von der Feldkonfiguration auf einer raumartigen Fläche ab. Damit ist der Zusammenhang zwischen den beiden Strukturen so lose, daß man nicht wie FJSS in [3,4] erwarten kann, daß mit einer Quaternionen-Quantentheorie automatisch eine Quantenfeldtheorie für das Eichfeld der Q -Automorphismengruppe $SO(3)$ einhergeht.

Trotzdem erschien es interessant zum einen die in FJSS begonnene klassische Theorie weiter zu untersuchen (Kap. I) als eine Eichtheorie, deren lokale Faser nicht nur eine Gruppe mit Darstellungsraum, sondern ein Zahlenkörper mit kontinuierlicher Automorphismengruppe ist, in dem alle lokalen Größen ihre Werte haben. Zum anderen wurde auch die Quaternionen-Quantenmechanik unabhängig von Eichüberlegungen in einer mehr physikalischen Weise entwickelt, als dies in den recht mathematischen Arbeiten [22,23] der Fall ist, auf die jedoch ausführlich zurückgegriffen wurde. Während die Frage nach einem direkten Zusammenhang zwischen quantisierter Eichtheorie und verallgemeinerter Quantenmechanik negativ beantwortet werden muß, bleiben solche Erweiterungen mit Quaternionen oder noch anderen Systemen faszinierende algebraische Strukturen. Dabei sind einem die abstrakten Ideen über Quantenlogik eine Hilfe zur physikalischen Interpretation solcher Strukturen, und man sollte die Möglichkeit einer Realisierung derart verallgemeinerter Quantentheorien in der Natur weiter im Auge behalten.

Literatur

- [1] H. Weyl Ber. d. preuss. Akad. d. Wissensch. 1918, 465
- [2] S. Weinberg Phys. Rev. Lett. 19, 1264 (1967)
- [3] D. Finkelstein, J.M. Jauch, S. Schiminovich, D. Speiser
J. Math. Phys. 3, 207 (1962)
- [4] D. Finkelstein, J.M. Jauch, S. Schiminovich, D. Speiser
J. Math. Phys. 4, 788 (1963)
Auf 3 und 4 wird auch mit der Abkürzung FJSS, den Initialen
der Autoren, verwiesen.
- [5] F. Gürsey in
Proc. of the John Hopkins Workshop 1974, Baltimore, Maryland
G. Domokos and S. Kövesi Domokos ed.
- [6] W. Thirring in
Proc. Schladming 1978, Springer-Verlag (wird veröffentlicht)
- [7] G. Birkhoff, J. v. Neumann
Ann. of Math. 37. 828 (1936)
- [8] J.M. Jauch
Foundations of Quantum Mechanics,
Addison-Wesley Publishing Company 1968
- [9] C. Piron
Helv. Acta Phys. 37, 439 (1964)
(französisch)
- [10] H. Goldstein
Klassische Mechanik
Addison-Wesley Publishing Company 1953
- [11] J. v. Neumann
Math. Grundlagen der Quantenmechanik
Verlag Julius Springer (1932)
- [12] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler
Gravitation
W.H. Freeman and Company, San Francisco 1973
- [13] E.S. Abers, B.W. Lee
Gauge Theories
Phys. Rep. 9c (1973)
North Holland Publishing Company Amsterdam

- [14] C. Garrod
Rev. Mod. Phys. 38, 483 (1966)
- [15] R.P. Feynman
Rev. Mod. Phys. 20, 267 (1948)
- [16] T.T. Wu, C.N. Yang
Phys. Rev. D12, 3845 (1975)
- [17] Y. Aharonov, D. Bohm
Phys. Rev. 115, 485 (1959)
- [18] J.D. Bjorken, S.D. Drell
Relativistische Quantenmechanik
B.I.-Hochschultaschenbuch 1966
- [19] R.P. Feynman
Phys. Rev. 80, 440 (1950)
- [20] G.G. Emch
Algebraic Methods in Statistical Mechanics and
Quantum Field Theory
John Wiley and Sons, New York 1972
- [21] S. Coleman
Secret Symmetry
Proc. Eric 1973
Academic Press 1975
- [22] K. Viswanath
Contributions to Linear Quaternionic Analysis.
Doctor Thesis: Indian Statistical Institute 1968
Ein mathematisches Lehrbuch über $\mathbb{Q}$ -Räume und Darstellungstheorie
- [23] E. Emch
Helv. Phys. Acta 36, 739 (1963)
(französisch)
- [24] G. Emch, C. Piron
Symmetry in Quantum Theory
J. Math. Phys. 4, 469 (1963)
- [25] L. O'Raifeartaigh
Phys. Rev. Lett. 14, 575 (1965)
- [26] S. Coleman, J. Mandula
Phys. Rev. 159, 1251 (1967)
- [27] S. Helgason
Differential Geometry and Symmetric Spaces, S. 352
Academic Press 1962

- [28] L.S. Pontrjagin
Topologische Gruppen, Teil I
B.G. Teubner, Leipzig 1957

Bei Herrn Prof. Dr. H.P. Dürr, dem Betreuer dieser Arbeit, möchte ich mich herzlich bedanken für klärende und nützliche Gespräche. Der Max-Planck-Gesellschaft danke ich für ein Stipendium.

Lebenslauf

Am 7.5.1951 wurde ich als Sohn des Postbeamten Werner Wolff und dessen Ehefrau Helene, geborene Kriegers, in Düsseldorf geboren. Von 1957 bis 1962 besuchte ich die Volksschule und die erste Gymnasialklasse in Darmstadt. Nach meinem Umzug nach Bonn-Bad Godesberg ging ich auf das Aloisius-Kolleg, wo ich 1969 das Abitur ablegte.

Zum Wintersemester 1969/70 begann ich das Physikstudium zunächst in Bonn bis zu meinem Vordiplom im Sommer 1971. Den Rest meiner Studienzzeit verbrachte ich in München, wo ich 1974/75 am Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik meine Diplomarbeit über "Erweiterte Symmetrien in freien Feldtheorien" anfertigte. Seit der Diplomprüfung im Juli 1975 bin ich an gleicher Stelle und ebenso wie bei der Diplomarbeit unter Anleitung von Prof. Dr. H.P. Dürr als Doktorand tätig.

